Análisis matemático
Un enfoque constructivo

Análisis matemático : un enfoque constructivo . - 1a ed. - Los Polvorines :
Universidad Nacional de General Sarmiento, 2012.
370 p. ; 23x16 cm. - (Textos básicos; 18)

ISBN 978-987-630-134-3

1. Matemática . 2. Análisis Matemático.
CDD 511.24

© Universidad Nacional de General Sarmiento, 2012
J. M. Gutiérrez 1159 (B1613GSX) Los Polvorines, Bs. As. Argentina
Tel.: (54 11) 4469-7507 Fax: (54 11) 4469-7504
e-mail: ediciones@ungs.edu.ar
www.ungs.edu.ar/ediciones

Hecho el depósito que marca la ley 11.723.
Prohibida su reproducción total o parcial.
Derechos reservados.

Análisis matemático
Un enfoque constructivo

Guillermo Matera

Colección Textos Básicos


Universidad
Nacional de
General
Sarmiento

UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SARMIENTO
AUTORIDADES

Rector
Dr. Eduardo Rinesi

Vicerrector
Lic. Gustavo Kohan

Director del Instituto de Ciencias
Dr. Roberto Schmit

Directora del Instituto del Conurbano
Lic. Daniela Soldano

Director del Instituto de Industria
Lic. Claudio Fardelli Corropolese

Director del Instituto del Desarrollo Humano
Dr. Daniel Lvovich

Secretario de Investigación
Lic. Pablo Bonaldi

Secretaria Académica
Dra. Gabriela Diker

Secretario General
Prof. José Gustavo Ruggiero

Secretaria de Administración
CP Daniela Guardado

Secretario Legal y Técnica
Dr. Jaime González

Índice general

Prefacio

Existe, aparentemente, amplio consenso en que la posición predominante que ocupa la matemática en la educación se debe, fundamentalmente, a su capacidad para "**resolver problemas**", en especial a partir del conjunto de herramientas que constituyen lo que se conoce por "cálculo". Ésta es una consideración central en los programas "oficiales" de matemática de la escuela media, que explica, en particular, la inclusión de temas de cálculo tales como límites, continuidad, derivadas e integrales de funciones de una variable en dichos programas. Sin embargo, **la organización de estos contenidos sugiere un enfoque desde los fundamentos** del cálculo más que desde la resolución de problemas. De otra manera, parecería difícil de entender que el estudio de los límites de funciones de una variable preceda el concepto de continuidad, y éste a su vez preceda a los de derivación e integración.

Históricamente, el desarrollo fue exactamente en la dirección inversa: sin remontarnos al método de exhaución de los griegos para el cálculo de áreas y el método de cálculo de tangentes de Fermat y otros, podríamos decir que el cálculo comienza con un nociones "difusas" de "infinitesimales" y "diferenciales", a partir de las cuales progresivamente emerge lo que hoy en día denominamos el cálculo diferencial e integral. Algo más de un siglo después surge la noción de continuidad, y habrá que esperar cerca de otro siglo más para que dispongamos de nociones de límite y de número real razonablemente fundamentadas. **Estos dos siglos de desarrollo** de los fundamentos de las nociones básicas del cálculo **no fueron un impedimento para que el cálculo progresara**. A pesar de los errores, las confusiones y las controversias, **la potencia que las ideas del cálculo mostraban** en la resolución de diversos problemas científicos y tecnológicos **resultaron el motor de su desarrollo**.

Nuestra convicción es que en la enseñanza de la matemática resulta imperativo destacar el rol de la resolución de problemas como "elemento necesario para el origen y desarrollo de sus distintas ramas", como bien expresan los programas oficiales del nivel medio de matemática. Así, este texto comienza con una "taxonomía" de problemas: la resolución de ecuaciones, la optimización, la búsqueda de estados de equilibrio y el cálculo de áreas. Estos problemas se constituyen en el motor del desarrollo de las herramientas del análisis, las cuales, a su vez, muestran su potencia precisamente en la aplicación a dichos problemas. En tal sentido, nuestro enfoque podría calificarse de "**constructivista**" (aunque no en la forma en la que se entiende este término desde el ámbito de la filosofía de la matemática): elegimos enfatizar el punto de vista "constructivo" de la matemática computacional o aplicada, con el doble propósito de mostrar una matemática a la vez comprensible y útil. En particular, un tema transversal a este texto es el de la **resolución en forma aproximada**, habida cuenta de que son "pocos" los problemas que admiten soluciones que puedan determinarse explícitamente de forma simbólica o analítica.

Sobre los lectores

El presente texto está orientado fundamentalmente a estudiantes de profesorado de matemática de escuela media, aunque también puede ser adoptado en cursos de análisis matemático de estudiantes de licenciatura. En tal sentido, algunos temas de importancia en la matemática de la escuela media, como los números reales y las funciones polinomiales y "trascendentes elementales", reciben un tratamiento que les otorga tal vez mayor preponderancia que en textos de "análisis" para estudiantes de licenciaturas en matemática. Asimismo, presuponemos que los lectores conocen las nociones básicas del "cálculo" diferencial e integral para funciones en una variable, a la vez que poseen familiaridad con el razonamiento matemático y un manejo fluido del lenguaje algebraico.

Organización del texto

Como hemos dicho, comenzamos estableciendo cuatro problemas "modelo" (Capítulo 1), a partir de los cuales planteamos algunas cuestiones claves para el desarrollo posterior. En el Capítulo 2 consideramos ejemplos "simples" de estos problemas, que nos permiten proponer algunas estrategias de resolución aproximada. Dado que **no queremos simplificar un concepto complejo, como el del número real**, en esta etapa las estrategias que proponemos consisten exclusivamente de aproximaciones racionales de la solución en consideración, y la validación de las mismas se realiza por medio de operaciones que involucran exclusivamente números racionales. En el Capítulo 3 establecemos la "tecnología" con la que habremos de atacar los problemas modelo en la primera mitad del texto: el lenguaje de las sucesiones, las funciones continuas y las sucesiones de Cauchy (de números racionales).

El tema central de los Capítulos 4, 5 y 6 es la noción de número real, cuyo fundamento se basa en la existencia de **desarrollos decimales infinitos que no corresponden al de ningún número racional**. Así, los números reales aparecen en primer lugar como un fenómeno "observable" (desarrollos decimales de sucesiones de Cauchy de números racionales que se "estabilizan"). Nuestro modelo de $\mathbb{R}$ no difiere esencialmente de la construcción clásica, debida originalmente a Méray y Cantor, según la cual se identifican dos sucesiones de Cauchy de números racionales si su diferencia converge a cero. La diferencia esencial de nuestro enfoque es que **proveemos un representante canónico** para cada clase de equivalencia: el que define el correspondiente desarrollo decimal infinito (admisible). De esta manera, nuestro modelo de los números reales se apoya en la forma en que los números reales aparecen en la experiencia "escolar", como desarrollos decimales infinitos "truncados". La noción de completitud surge ligada a las dificultades que nos plantean nuestros problemas modelo, y en tal sentido, se expresa por medio de varias "hipótesis", relacionadas pero a priori diferentes, necesarias para justificar la validez de nuestras estrategias de resolución.

En los Capítulos 7 y 8, usando el modelo de los números reales recién construido y las "hipótesis" de completitud, abordamos los tres primeros problemas modelo, primero con funciones polinomiales, y luego con funciones continuas. El Capítulo 7 se dedica a la resolución de ecuaciones polinomiales, y nos permite anticipar, en un contexto más simple, diversas cuestiones que serán estudiadas posteriormente en el marco de las funciones diferenciables (en particular, el polinomio de Taylor y el método de Newton). En el Capítulo 8 establecemos resultados de existencia para estos tres problemas modelo con funciones continuas: los teorema de Bolzano, Weierstrass y de

Punto fijo. Al mismo tiempo, analizamos bajo cuáles hipótesis sobre el dominio de las funciones en consideración estos resultados se satisfacen, lo que nos da el punto de partida para introducir dos nociones fundamentales de la topología de $\mathbb{R}$: la conexión y la compacidad.

En el Capítulo 9 se "cierra" la cuestión pendiente de la completitud de $\mathbb{R}$, demostrando que las hipótesis de completitud que habíamos aceptado hasta el momento son equivalentes, y que dan lugar a un único modelo, salvo isomorfismos: el de un cuerpo ordenado completo arquimediano. Además, introducimos las series numéricas, junto con sus criterios más conocidos de convergencia, y estimaciones del error de la aproximación de números reales por medio de series truncadas.

A partir del Capítulo 10 comienza lo que podríamos denominar la segunda parte del texto, marcada por la aparición de los límites "continuos". Éstos aparecen ligados a las caracterizaciones topológicas de la continuidad.

Los Capítulos 11, 12 y 13 se dedican a la noción de diferenciabilidad. La diferenciabilidad se introduce en el Capítulo 11 en relación con la existencia de aproximaciones locales lineales óptimas, algo que ya había sido anticipado en la discusión del método de Newton, en tanto que la derivabilidad se presenta como la versión "operativa" de la diferenciabilidad. En el Capítulo 12 obtenemos estimaciones para funciones diferenciables, fundamentalmente en base al Teorema del valor medio y el Teorema de Taylor. En el Capítulo 13 aplicamos todos los resultados de los dos capítulos precedentes a fin de obtener herramientas para resolver los tres primeros problemas modelo con funciones diferenciables. Comenzamos con la existencia de extremos locales y globales de funciones diferenciables y consideramos criterios locales de convergencia de la iteración de punto fijo y el método de Newton.

Finalmente, los Capítulos 14, 15 y 16 se dedican al cuarto problema modelo: el cálculo de áreas (de figuras planas). En el Capítulo 14 consideramos la integral de Riemann de **funciones continuas**. Modelamos la noción de área definida por el gráfico de una función continua en un intervalo por medio de sumas de Riemann y de Cauchy y discutimos métodos aproximados de integración definida. El Capítulo 15, de carácter más técnico, se dedica a discutir la noción de función integrable (Riemann). Por último, el Capítulo 16 se centra en el Teorema fundamental del cálculo, las integrales impropias y una aplicación importante para los fundamentos de las funciones trigonométricas: el concepto de longitud de curva (del gráfico de una función de clase C^1).

Para concluir, cabe observar que, a lo largo del texto, definimos las funciones exponenciales y trigonométricas y establecemos sus propiedades más importantes, a medida que tenemos herramientas como para describirlas adecuadamente.

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi agradecimiento a Antonio Cafure y Mariano De Leo, con quienes compartimos una visión sobre la enseñanza de la matemática a nivel universitario y cierto inconformismo sobre los textos más conocidos sobre el tema. Sus múltiples influencias se aprecian tanto en el enfoque como en el estilo del texto.

Este libro surge a partir de unas "Notas de análisis" que escribí para el curso de "Análisis Matemático" del Profesorado Universitario en Matemática de la Universidad Nacional de General Sarmiento. En tal sentido, el texto se beneficia significativamente con los aportes de los estudiantes

que participaron de las diversas ediciones del curso en estos últimos años.

También quiero expresar mi gratitud a Nardo Giménez y Mariana Pérez, quienes leyeron cuidadosamente diversas versiones preliminares y realizaron observaciones que me permitieron simplificar la exposición de algunos temas y corregir numerosos errores. Asimismo, cabe destacar los comentarios de dos evaluadores anónimos, cuyas sugerencias resultaron fundamentales en la preparación de la versión final del texto. Por otro lado, agradezco a la Universidad Nacional de General Sarmiento, y en particular al Instituto del Desarrollo Humano, por darme la oportunidad de publicarlo.

Finalmente, dedico este libro a Nancy, Lucía y Matías, sin cuyo apoyo y cariño probablemente jamás lo hubiera concluido.

0. Preliminares

El presente texto está destinado a lectores que conocen las nociones básicas del cálculo en una variable. También es conveniente que los lectores posean conocimientos de aritmética elemental y del álgebra de polinomios sobre los racionales. En este capítulo hacemos un resumen de las nociones y resultados que vamos a utilizar en el texto.

Antes de comenzar con este resumen mencionamos la siguiente convención que hemos adoptado: vamos a utilizar los símbolos ":=" y "=:" para **definiciones**, en tanto que vamos a reservar el símbolo "$=$" para **identidades** entre objetos matemáticos previamente definidos. Así, por ejemplo, dado $n \in \mathbb{N}$, la expresión "$n! := 1 \cdots n$" indica que **definimos el símbolo** $n!$ como el número natural $1 \cdots n$.

0.1. Conjuntos y funciones

En lo que sigue vamos a utilizar la terminología y notaciones de la teoría de conjuntos en lo que se refiere a conjuntos y funciones. En particular, vamos a suponer conocidos los conceptos de conjunto, elemento, pertenencia y no pertenencia (representados por los símbolos "$\in$" y "$\notin$" respectivamente) e inclusión y no–inclusión (representados por los símbolos "$\subset$" y "$\not\subset$" respectivamente). El **conjunto vacío** se denota por $\emptyset$.

Dados dos conjuntos A y B, recordamos que:

- la **intersección** $A \cap B$ de A y B es el conjunto de todos los elementos de A que pertenecen a B (o viceversa);
- la **unión**[1] $A \cup B$ de A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B;
- la **diferencia** $A \setminus B$ de A y B es el conjunto de todos los elementos de A que no pertenecen a B;
- el **producto cartesiano**[2] $A \times B$ de A y B es el conjunto de todos los pares ordenados (a,b) tales que $a \in A$ y $b \in B$.

Una **función** f de A en B es un subconjunto $G(f)$ de $A \times B$ tal que, para cada $a \in A$, existe un único $b \in B$ con $(a,b) \in G(f)$. La notación $f : A \to B$ indica que f es una función de A en B,

[1]Cabe destacar que, si bien el concepto de unión es intuitivamente claro, la definición que hemos dado no está correctamente formulada en la teoría axiomática de conjuntos más comúnmente aceptada, esto es, la de Zermelo–Fraenkel (ver, por ejemplo, [Hal74]). Sin embargo, es fácil proveer definiciones "correctas" ad–hoc para cada caso en que utilizamos el concepto de unión en este texto.

[2]Nuevamente, esta definición no es "correcta" en la teoría axiomática de Zermelo–Fraenkel.

en tanto que la pertenencia de un par (a,b) a $G(f)$ se denota en la forma $f(a) = b$. El conjunto $G(f)$ también se denomina el **gráfico** de la función f (aunque "es" de hecho la función f en sí). El conjunto A se denomina el **dominio** y el conjunto B el **codominio** de f. Por último, la **imagen** de f es el conjunto de los elementos $b \in B$ tales que existe $a \in A$ con $f(a) = b$.

Dadas funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, definimos la **composición** de f y g, que denotamos por $g \circ f$, como la función de A en C tal que $(g \circ f)(a) := g(f(a))$ para cada $a \in A$. La función **identidad** $\mathrm{id}_A : A \to A$ de A se define por $\mathrm{id}_A(a) := a$ para cada $a \in A$. Una función $f : A \to B$ se dice **inyectiva** si $f(a) = f(a')$ implica que $a = a'$ para cada $a, a' \in A$. A su vez, f se dice **suryectiva** si su imagen es B. Una función $f : A \to B$ inyectiva y suryectiva se dice **biyectiva**, y en tal caso, la función **inversa** $f^{\ 1} : B \to A$ de f queda unívocamente determinada por la regla: $f^{\ 1}(b) = a$ si y solo si $f(a) = b$.

Dada una función $f : A \to B$ y un subconjunto $S \subset A$, la **restricción de f a S** es la función de S en B, que denotamos por $f|_S$, definida por $f|_S(s) := f(s)$ para cada $s \in S$. Asimismo, dado un subconjunto $S \subset A$ y una función $f : A \to B$, diremos que f es una **extensión** de una función $g : S \to B$ si $f(s) = g(s)$ para cada $s \in S$.

Dada una función $f : A \to B$ y un subconjunto $S \subset B$, definimos la **imagen inversa** $f^{\ 1}(S)$[3] de S por f en la forma

$$f^{\ 1}(S) := \{a \in A : f(a) \in S\}.$$

Asimismo, para $R \subset A$, definimos la **imagen (directa)** $f(R)$ de R por f como

$$f(R) := \{b \in B : \text{existe } a \in R \text{ tal que } f(a) = b\}.$$

Dado un conjunto A, un subconjunto $S \subset A \times A$ se denomina una **relación de equivalencia** (entre los elementos de A) si valen las siguientes condiciones:

- $(a,a) \in S$ para cada $a \in A$;
- si $(a,b) \in S$, entonces $(b,a) \in S$;
- si $(a,b) \in S$ y $(b,c) \in S$, entonces $(a,c) \in S$.

0.2. Aritmética y álgebra de polinomios

Denotamos por $\mathbb{N}$ al **conjunto de los números naturales** $\{1,2,3,\ldots\}$ y por $\mathbb{Z}$ al **conjunto de los números enteros** $\{0,\pm 1,\pm 2,\ldots\}$. Una propiedad fundamental de $\mathbb{N}$ es el **principio de inducción matemática**, que enunciamos a continuación.

Teorema 0.2.1 (Principio de inducción matemática). *Sea $S \subset \mathbb{N}$ un subconjunto tal que:*

- *$1 \in S$,*
- *si $k \in S$, entonces $k+1 \in S$.*

[3] No debe identificarse la imagen inversa $f^{-1}(S)$ de un subconjunto $S \subset B$ por una función $f : A \to B$ con la aplicación de la función inversa f^{-1} a S: el concepto de imagen inversa es **independiente de la existencia de la función inversa** de la función en consideración. Sin embargo, en caso de que se trate de una función inversible, la imagen inversa $f^{-1}(S)$ de $S \subset B$ **coincide** con el subconjunto que se obtiene aplicando la función inversa f^{-1} a cada elemento de S.

Entonces $S = \mathbb{N}$.

En lo que sigue vamos a utilizar la siguiente **desigualdad de Bernoulli**, cuya demostración nos sirve a fin de ilustrar la aplicación del principio de inducción matemática.

Lema 0.2.2 (Desigualdad de Bernoulli). *Para* $a \geq -1$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *vale la desigualdad*

$$(1+a)^n \geq 1+na. \tag{0.1}$$

Demostración. Fijemos $a \geq -1$ y consideremos el conjunto S formado por todos los números naturales n para los cuales es válida la desigualdad (0.1).

Observamos en primer lugar que $1 \in S$. En efecto, dado que

$$(1+a)^1 = 1+a = 1+1\cdot a,$$

concluimos que (0.1) es válida para $n = 1$.

Supongamos ahora que $k \in S$, y veamos que $k+1 \in S$. Dado que $k \in S$, sabemos que $(1+a)^k \geq 1+ka$. Por lo tanto,

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka) = 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a.$$

Esto prueba que $k+1 \in S$.

En resumen, tenemos que $1 \in S$ y, si $k \in S$, entonces $k+1 \in S$. En consecuencia, el principio de inducción matemática (Teorema 0.2.1) asegura que $S = \mathbb{N}$, o, en otras palabras, que (0.1) resulta válida para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Otra propiedad fundamental de los números naturales es el **principio de la buena ordenación**, que vamos a utilizar frecuentemente.

Teorema 0.2.3 (Principio de buena ordenación). *Todo subconjunto* $S \subset \mathbb{N}$ *no vacío posee un elemento mínimo.*

Coeficientes binomiales

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos el **factorial** $n!$ de n por $n! := 1\cdots n$. Asimismo, definimos $0! := 1$. Dados números enteros n y k tales que $0 \leq k \leq n$, se define el **coeficiente binomial**

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

De la definición se deducen inmediatamente las siguientes igualdades:

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Asimismo, tenemos la **identidad de Pascal**: si $0 < k < n$, entonces

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

A partir de estas identidades es fácil ver que $\binom{n}{k}$ es un número entero que, de hecho, resulta igual a la cantidad de subconjuntos con k elementos del conjunto $\{1,\dots,n\}$. Por último, mencionamos la identidad del **binomio de Newton**, de utilidad en lo que sigue.

Lema 0.2.4 (Binomio de Newton)**.** *Para $a,b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, vale la identidad*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

En relación con las operaciones aritméticas en $\mathbb{Z}$, cabe mencionar la existencia y unicidad de la división con resto, que enunciamos a continuación.

Teorema 0.2.5 (Teorema de la división)**.** *Si a y b son dos números enteros tales que $b \neq 0$, existen únicos enteros q y r con las siguientes propiedades:*

- $a = b \cdot q + r$,
- $0 \leq r < |b|$.

0.2.1. Números racionales

Vamos a suponer conocido el **conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales**, esto es, el conjunto de las fracciones m/n con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, con la convención (la relación de equivalencia) de que dos fracciones m/n y p/q son equivalentes si $mq = np$.

Definimos el **valor absoluto** $|a|$ de un número racional $a \in \mathbb{Q}$ como:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

El valor absoluto satisface las siguientes propiedades: si $a,b \in \mathbb{Q}$, entonces

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
- $|a+b| \leq |a| + |b|$ **(desigualdad triangular)**.

La **distancia** entre dos números racionales a,b se define como $|a-b|$.

Un concepto fundamental en este texto es el de una **sucesión de** $\mathbb{Q}$. Una sucesión (infinita) de racionales es simplemente una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. La imagen $a(n)$ se denomina el n–ésimo término de la sucesión y se suele denotar en la forma a_n. Asimismo, vamos a denotar a cada sucesión $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ en la forma $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En ciertas ocasiones resulta natural numerar los términos de una sucesión por medio de los enteros no negativos $\mathbb{Z}_{>0} := \{0\} \cup \mathbb{N}$. A fin de indicar que hemos adoptado dicha numeración, vamos a denotar a cada sucesión $a : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Q}$ en la forma $(a_n)_{n>0}$.

Por último, cabe mencionar que, más adelante, vamos a considerar sucesiones de números reales, utilizando las mismas notaciones que para las sucesiones de $\mathbb{Q}$.

0.2.2. Polinomios con coeficientes racionales

Sea x una indeterminada. Denotamos por $\mathbb{Z}[x]$ al conjunto de los polinomios en la variable x con coeficientes enteros y por $\mathbb{Q}[x]$ al conjunto de los polinomios en la variable x con coeficientes racionales.

Para $f \in \mathbb{Q}[x]$, denotamos por $\mathrm{gr}(f)$ al **grado** de f. Un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado n se dice **mónico** si el coeficiente de x^n es igual a 1.

Vamos a suponer conocidas las operaciones aritméticas en $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$. En particular, de forma similar a lo que ocurre en $\mathbb{Z}$, en $\mathbb{Q}[x]$ tenemos que la división con resto está bien definida, resultado que se conoce como el **Teorema de la división** en $\mathbb{Q}[X]$.

Teorema 0.2.6 (Teorema de la división). *Si f y g son dos polinomios en $\mathbb{Q}[x]$ con $g \neq 0$, existen únicos polinomios q y r en $\mathbb{Q}[x]$ con las siguientes propiedades:*

- $f = g \cdot q + r$,
- $r = 0$ *o* $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(g)$.

Una identidad que vamos a utilizar frecuentemente es

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \cdots + x + 1).$$

Dados dos polinomios $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, denominamos el **máximo común divisor** entre f y g al polinomio mónico $d \in \mathbb{Q}[x]$ de mayor grado que divide a f y a g. Una forma de obtener un múltiplo constante del máximo común divisor de dos polinomios f y g en $\mathbb{Q}[x]$ es por medio del **algoritmo de Euclides**. El algoritmo de Euclides consiste en calcular la siguiente sucesión finita de divisiones, suponiendo que $\mathrm{gr}(f) \geq \mathrm{gr}(g)$:

$$\begin{aligned}
f &= gq_0 + r_0, \\
g &= r_0 q_1 + r_1, \\
r_0 &= r_1 q_2 + r_2, \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, \\
r_{n-1} &= r_n q_n + 0.
\end{aligned}$$

El resultado clave que relaciona el algoritmo de Euclides con el cálculo del máximo común divisor es el siguiente.

Teorema 0.2.7. *En el algoritmo de Euclides, el último resto r_n no nulo es un múltiplo constante no nulo del máximo común divisor entre f y g.*

Dado un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$, diremos que un número racional a es una **raíz** de f de **multiplicidad** $k \in \mathbb{N}$ si $(x-a)^k$ divide a f pero $(x-a)^{k+1}$ no lo divide. Un resultado clásico, debido a D'Alembert, es el siguiente.

Lema 0.2.8. *Un polinomio no nulo $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado n tiene a lo sumo n raíces en $\mathbb{Q}$, contadas con multiplicidad.*

A su vez, tenemos el conocido **criterio de Gauss** para determinar las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Lema 0.2.9 (Criterio de Gauss). *Sea $f := a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio con $a_n \neq 0$. Si p/q es una raíz de f tal que $p,q \in \mathbb{Z}$ no tienen factores comunes no triviales, entonces q divide a a_n y p divide a a_0.*

Dado un polinomio $f := a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Q}[x]$, definimos el **polinomio derivado** f' de f por $f' := a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$. Esta operación de derivación de polinomios posee las siguientes propiedades: si f y g son dos polinomios de $\mathbb{Q}[x]$,

- $(f+g)' = f' + g'$;
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;
- $f' = 0$ si f es un polinomio constante.

Más generalmente, para $k \geq 2$ definimos la k–**ésima derivada** de f por $f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$. El siguiente resultado expresa la multiplicidad de las raíces de un polinomio dado en términos de las derivadas sucesivas del mismo.

Lema 0.2.10. *Sea $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio y $a \in \mathbb{Q}$ un raíz de f. Entonces a es una raíz de multiplicidad $k \geq 1$ de f si y solo si*

- *a es una raíz común de $f, f', f'', \ldots, f^{(k-1)}$ y no es raíz de $f^{(k)}$;*
- *$f = (x-a)^k g(x)$, con $g \in \mathbb{Q}[x]$ y $g(a) \neq 0$.*

Asimismo, una raíz $a \in \mathbb{Q}$ de multiplicidad $k \geq 1$ de f es también una raíz de multiplicidad $k-m$ de $f^{(m)}$ para $1 \leq m \leq k-1$.

Cabe destacar que también vamos a considerar polinomios con coeficientes reales. En tal caso, todos los resultados que hemos mencionado en esta sección, salvo el criterio de Gauss, se extienden de la misma manera a dichos polinomios.

0.3. Cálculo

Como hemos dicho, el presente texto está destinado a lectores que conocen las nociones básicas del cálculo de una variable. En tal sentido, suponemos que el lector está familiarizado con los conceptos de **función continua**, y de **derivada** e **integral** (definida) de una función continua. En particular, vamos a utilizar reiteradamente el siguiente resultado.

Teorema 0.3.1 (Bolzano). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Un importante resultado del cálculo de funciones de una variable, que vamos a utilizar antes de discutirlo en profundidad, es el **Teorema del valor medio**.

Teorema 0.3.2 (Valor medio)**.** *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es una función continua que es derivable en* (a,b)*, entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Una conocida consecuencia del Teorema del valor medio es el siguiente resultado.

Corolario 0.3.3. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua que es derivable en* (a,b)*. Tenemos las siguientes afirmaciones:*

- *si* $f'(c) \leq 0$ *para cada* $c \in (a,b)$*, entonces* f *es decreciente en* $[a,b]$*;*
- *si* $f'(c) \geq 0$ *para cada* $c \in (a,b)$*, entonces* f *es creciente en* $[a,b]$*;*
- $c \in (a,b)$ *es un máximo o mínimo local de* f*, entonces* $f'(c) = 0$*.*

El próximo resultado permite asegurar la existencia de ceros de la derivada de una función dada.

Teorema 0.3.4 (Rolle)**.** *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua que es derivable en* (a,b)*, tal que* $f(a) = f(b)$*. Entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$*.*

Otro resultado clave que recordamos es el **Teorema fundamental del cálculo**, que establece **una relación entre la integración y la derivación**.

Teorema 0.3.5 (Teorema fundamental del cálculo)**.** *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua y sea* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *la función*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt. \tag{0.2}$$

Entonces F *es derivable y* $F'(c) = f(c)$ *para cada* $c \in [a,b]$*.*

Una función derivable $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ que satisface la condición $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a,b]$, como en el Teorema fundamental del cálculo (Teorema 0.3.5), se dice una función **primitiva** de f. Una observación importante es que **dos primitivas de la misma función difieren en una constante**. Una consecuencia inmediata de esta observación y el Teorema fundamental del cálculo (Teorema 0.3.5) es el siguiente resultado, que a veces se denomina la segunda forma del Teorema fundamental del cálculo o la **regla de Barrow**.

Corolario 0.3.6. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua y sea* $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función primitiva de* f *en* $[a,b]$*. Entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

1. Algunos problemas modelo

En sus orígenes, el cálculo fue concebido como una herramienta para describir fenómenos físicos que involucran movimiento. Tales fenómenos se caracterizan a partir de las relaciones existentes entre cantidades de magnitudes físicas, que generalmente se representan por medio de ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales, no lineales o diferenciales.

El tipo de problemas más simple es aquel que se refiere a fenómenos descriptos a partir de una magnitud física. En lo que sigue vamos a presentar algunos problemas de este tipo, que nos van a plantear una serie de preguntas centrales que intentaremos responder en los capítulos siguientes.

1.1. Una ecuación en geodesia

La geodesia es la rama de la matemática aplicada que se interesa por la medida o la determinación de la forma de la Tierra. En este ámbito, la descripción de la Tierra se expresa en términos de una serie de parámetros, que se relacionan por medio de ciertas ecuaciones no lineales.

En una primera aproximación, la Tierra es un elipsoide de revolución. La forma de dicho elipsoide puede definirse a partir de dos parámetros: el radio "ecuatorial" a y el radio "polar" b. También puede darse a y la (primera) "excentricidad"

$$e := \sqrt{1 - b^2/a^2}.$$

Otros dos parámetros relevantes, la "tasa de rotación" ω y el producto GM de la constante gravitacional universal y la masa, permiten describir el campo gravitacional asociado. Estos cuatro parámetros, a, e, GM y ω, determinan de forma unívoca el elipsoide geodésico. Por último, cabe mencionar una constante J_2 asociada al campo gravitacional, de carácter más técnico, que puede determinarse unívocamente en términos de estos cuatro parámetros.

Todos estos parámetros se relacionan por medio de las siguientes ecuaciones, que tomamos de [Ale85]:

$$3J_2 = e^2 - \frac{4}{15}\,\frac{\omega^2 a^3}{GM}\,\frac{e^3}{2q_0}, \tag{1.1}$$

siendo

$$2q_0 = \left(1 + \frac{3}{e'^2}\right)\arctan e'^2 - \frac{3}{e'}, \quad e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}. \tag{1.2}$$

En la práctica se conocen de forma aproximada los valores de a, ω, GM y J_2, y se trata de determinar e. Si reemplazamos el valor de e' en la primera ecuación de (1.2) por su expresión en términos de e de la segunda ecuación de (1.2), obtenemos una expresión explícita de q_0 en función de e. Reemplazando a su vez esta expresión en (1.1) obtenemos una ecuación que relaciona a a, ω, GM,

J_2 y e. Así, dados a, ω, GM y J_2, se trata de determinar e a partir de la ecuación resultante. Esto plantea las siguientes cuestiones:

- Dados a, ω, GM y J_2, ¿existe un único valor de e que satisface (1.1) y (1.2)?
- Suponiendo que la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, ¿cómo puede determinarse e de forma aproximada?
- Dado un método de aproximación de e, ¿cómo afectan los errores de "observación" en a, ω, GM y J_2 al cálculo de e?

1.2. Un problema de optimización en bioeconomía

La sobreexplotación de los recursos pesqueros ha motivado el estudio del funcionamiento de la actividad pesquera. El objetivo fundamental es lograr un manejo sustentable de la misma, por medio de una asignación de los recursos pesqueros que garantice a su vez el aprovechamiento completo de los mismos.

En tal sentido, el problema fundamental es la determinación de la captura o rendimiento máximo sustentable. Para esto es necesario determinar, para un stock explotado, si el nivel actual de la población se encuentra por encima o por debajo del que proporciona la captura máxima de equilibrio. Asimismo, es necesario proporcionar estimaciones del nivel de población y la intensidad correspondiente de pesca que generarían dicha captura. Para abordar esta cuestión de forma cuantitativa, ha sido propuesto un modelo matemático del siguiente tipo (ver, por ejemplo, [Cla79] o [MS85]): si $B = B(t)$ es la biomasa (en peso) en el instante t de tiempo, entonces el crecimiento de la biomasa está determinado por la ecuación diferencial

$$\frac{dB}{dt} = F(B(t)) - C(t),$$

donde $F(B)$ es la función de crecimiento natural del recurso en consideración y $C(t)$ es la tasa instantánea de capturas. El crecimiento natural del recurso suele expresarse en forma "logística":

$$F(B(t)) = rB(t)\left(1 - \frac{B(t)}{K}\right), \tag{1.3}$$

donde r es la tasa intrínseca de crecimiento poblacional y K es la capacidad de carga del ambiente. Por otro lado, en el modelo de Schaefer se propone la siguiente expresión para la tasa instantánea de captura C:

$$C(t) = q f(t) B(t),$$

donde $f(t)$ es el esfuerzo de pesca y q representa el coeficiente de capturabilidad, definido como la fracción de población que es extraída por unidad de esfuerzo.

Una explotación sostenible implica una tasa de crecimiento nula, esto es,

$$\frac{dB}{dt} = F(B(t)) - C(t) = 0, \text{ o equivalentemente, } F(B(t)) = C(t).$$

Así, la máxima tasa de captura sostenible es aquella que corresponde al nivel de biomasa que **maximiza** la función de crecimiento $F(B(t))$ del recurso. En términos de dicho nivel de biomasa, puede determinarse el esfuerzo de pesca $f(t)$ correspondiente.

Una diferencia esencial entre los recursos pesqueros y otros recursos naturales, tales como los forestales, es que el "stock" existente no es observable. Por ende, el modelo se basa en parámetros que son difíciles de estimar. Más aún, en el caso de pesquerías multiespecíficas se hace difícil discernir el esfuerzo efectivo aplicado a cada especie, por lo que diversas funciones de crecimiento de población F y de tasa de capturabilidad C han sido consideradas. En tal sentido, el problema de los recursos pesqueros plantea las siguientes cuestiones:

- Dadas funciones F y C, ¿existe un único valor $f(t)$ de esfuerzo de pesca correspondiente a la máxima tasa de captura sustentable?
- Suponiendo que la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, ¿cómo se determina dicho esfuerzo de pesca de forma aproximada?
- ¿Cómo afectan a estos valores modificaciones en los valores de los parámetros del modelo?

1.3. Un problema de equilibrio en biología

En el estudio de la evolución de poblaciones, ya sea que se trate de poblaciones humanas, de especies en peligro de extinción, o de ciertos tipos de virus o bacterias, se utilizan modelos matemáticos que contribuyen al entendimiento del comportamiento dinámico de la población en consideración y permiten hacer predicciones sobre el mismo.

En particular, los modelos de una especie son relevantes para los estudios de laboratorio. En muchas especies no existen interacciones significativas entre generaciones sucesivas, por lo que el crecimiento de la población procede esencialmente de manera discreta. Si adoptamos una escala de tiempo de forma tal que una nueva generación tarda tiempo 1 en nacer, el modelo debe entonces expresar la población al tiempo $t+1$, que notamos por N_{t+1}, en términos de la población N_t al tiempo t. Esto nos lleva a estudiar un proceso de evolución de la forma

$$N_{t+1} = f(N_t), \tag{1.4}$$

donde $f(N_t)$ es, en general, una función no lineal de N_t.

Generalmente se observa que poblaciones pequeñas se incrementan, en tanto que poblaciones grandes tienen a declinar en número. En la Figura 1.1 ilustramos la forma típica del gráfico de una función f que representa una dinámica de evolución de este tipo.

A fin de modelar este comportamiento se ha propuesto la ecuación logística de Verhulst, donde el crecimiento de la población se describe por una función del tipo (1.3) (ver, por ejemplo, [EK05]). Un modelo más realista, conocido como la curva de Ricker, es el siguiente (ver, por ejemplo, [Mur02, §2.1]):

$$N_{t+1} = N_t \exp\left(r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right), \; r > 0, \; K > 0. \tag{1.5}$$

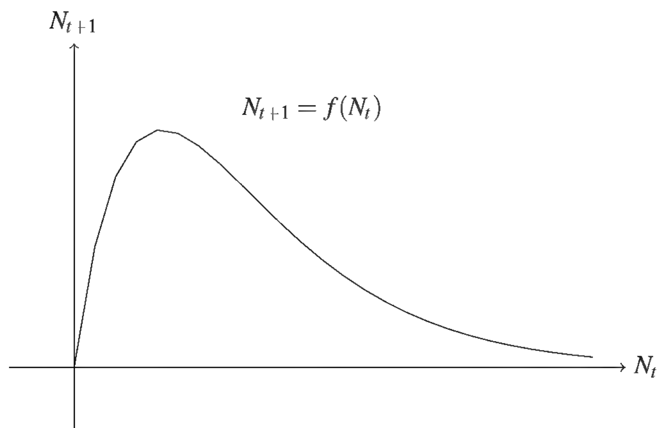


Figura 1.1.: Forma típica del crecimiento en el modelo $N_{t+1} = f(N_t)$.

En este modelo, al igual que en el de la ecuación logística, la tasa de crecimiento se reduce para valores "grandes" de N_t, aunque, a diferencia del modelo de la ecuación logística, los valores de N_{t+1} son positivos para cualquier valor de N_t.

Se ha observado que la cantidad de miembros de la población de una especie dada, sea ésta grande o pequeña, frecuentemente alcanza un estado "estacionario", luego del cual no se observan cambios apreciables en la misma (salvo que ocurran cambios significativos en el medio ambiente correspondiente). Un **estado estacionario** (o **de equilibrio**) es una cantidad de población N^* para la cual, de acuerdo con la ley de evolución (1.4), la población de la especie en cuestión se mantiene constante, esto es,

$$N^* = f(N^*). \tag{1.6}$$

Determinar los estados de equilibrio de una ley de evolución dada, como por ejemplo la que define la curva de Ricker (1.5), es fundamental para describir la dinámica de crecimiento de la población considerada. En tal sentido, dada una ley de evolución (1.4), se plantean las siguientes preguntas:

- ¿Existen soluciones de (1.6)?
- En tal caso, ¿cómo pueden determinarse éstas de forma aproximada?
- ¿Son estables? Es decir, dada una cantidad de población N_t "cercana" a un estado estacionario N^*, ¿evoluciona la población hacia dicho valor estacionario N^*?

1.4. Una taxonomía de problemas

En resumen, diversas cuestiones científicas y tecnológicas conducen a modelos matemáticos que requieren resolver problemas de alguno de los siguientes tipos:

- resolver la ecuación (no lineal)

$$f(x) = 0, \tag{1.7}$$

- resolver el problema de minimización

$$\min_{x \in A} f(x). \tag{1.8}$$

- determinar los estados de equilibrio

$$f(x) = x. \tag{1.9}$$

Preguntas típicas que se plantean en relación con (1.7), (1.8) y (1.9) son la existencia y unicidad de las soluciones, cómo determinarlas y cuán "estables" son en presencia de pequeñas perturbaciones de los parámetros del problema.

Históricamente el enfoque predominante ha sido el de resolver estos problemas en forma "exacta" (o "analítica" o "simbólica"). Esto puede apreciarse, por ejemplo, en los esfuerzos por resolver la ecuación polinomial "general" de grado n por radicales, esfuerzos que culminaron con las conocidas fórmulas de la soluciones de la ecuación de grado 2, 3 y 4, y la demostración de Niels Abel y Evariste Galois de la inexistencia de una fórmula por radicales de las soluciones de la ecuación de grado n si $n \geq 5$. Más generalmente, "pocas" ecuaciones del tipo (1.7), o problemas de minimización del tipo (1.8), o de estados de equilibrio del tipo (1.9), admiten soluciones en forma cerrada o analítica que sean significativas desde el punto de vista de la aplicación en consideración. Por lo tanto, se impone la necesidad de **resolver dichos problemas de forma aproximada**. Esto, a su vez, nos plantea otras cuestiones:

- ¿cómo (de qué manera) aproximar?
- ¿cuánto aproximar?

Resolver (1.7), (1.8) y (1.9) de forma aproximada va a ser la cuestión central que va a guiar el desarrollo de los capítulos 3 a 13. Adicionalmente, en los capítulos 14 a 16, vamos a considerar otro problema fundamental: el de determinar (de forma aproximada) el área de figuras planas.

2. Un problema “simple”: resolver $x^2 = 2$

A fin de comenzar a discutir las cuestiones generales que planteamos en el capítulo anterior, vamos a analizar un problema de tipo (1.7) sencillo: determinar las soluciones positivas de la ecuación

$$x^2 - 2 = 0. \tag{2.1}$$

En primer lugar, es fácil ver que (2.1) solo puede tener una solución positiva, dado que si α, β son posibles soluciones positivas distintas, digamos $\alpha < \beta$, entonces $\alpha^2 < \alpha\beta < \beta^2$, con lo cual solo una de ellas puede ser solución (en la Sección 7.2.2 vamos a darle un tratamiento más sistemático a la cuestión de la cantidad de soluciones de una ecuación polinomial). A primera vista, parecería no ser muy interesante interrogarse acerca de la solución positiva de (2.1), dado que “sabemos” que es $x = \sqrt{2}$. De hecho, ésta es la forma en que habitualmente se define $\sqrt{2}$: la única solución positiva de (2.1). Sin embargo, esto no parecería darnos una “solución” de (2.1): simplemente hemos utilizado un símbolo para representar la solución que estamos buscando. Más bien, nos plantea la pregunta básica: ¿qué significa “resolver” (2.1)?

Una posible forma de “resolver” (2.1) “de manera exacta” sería hallar un racional positivo α tal que $\alpha^2 - 2 = 0$. Desafortunadamente, (2.1) no tiene soluciones racionales: según el criterio de Gauss (Lema 0.2.9), si a/b es una raíz racional de $x^2 - 2$ con $(a,b) = 1$, entonces b divide a 1 y a divide a 2, lo cual nos deja a $a/b = \pm 1, \pm 2$ como únicas posibles raíces racionales. Es claro que ninguno de estos valores es raíz de $x^2 - 2$.

No podemos entonces “encontrar” una solución exacta (es decir, racional) de (2.1). Y en este punto es fundamental tener en cuenta que, de acuerdo a lo que hemos dicho en el Capítulo 1, nuestra ecuación (2.1) probablemente describa una magnitud que queremos determinar. En tal sentido, si no podemos determinar dicha magnitud de manera exacta, tal vez podamos **aproximarla con “suficiente” precisión** (de nuevo, a los fines del modelo en cuestión). En lo que sigue, cuando se trate de resolver una ecuación que no posea una solución exacta (digamos, para fijar ideas, una solución racional) que pueda determinarse explícitamente, **vamos a considerarla “resuelta” si podemos determinar aproximaciones suficientemente precisas** del problema en consideración.

2.1. Primer intento: el método de bisección

Se trata entonces de resolver aproximadamente (2.1), esto es, se trata de determinar racionales positivos que sean “aproximadamente” raíces de la función $f : x \mapsto x^2 - 2$.

A fin de orientar nuestra búsqueda, vamos a suponer por el momento que (2.1) admite una solución positiva, digamos α. Así, $f(\alpha) := \alpha^2 - 2 = 0$. Dado que, como hemos observado, la función $x \mapsto x^2$ es estrictamente creciente en los positivos, inmediatamente deducimos que f también es

estrictamente creciente en los positivos. Además, $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, con lo cual sería “esperable” que $1 \leq \alpha \leq 2$. En otras palabras, si existe una solución de (2.1), ésta debe necesariamente pertenecer al intervalo “inicial”

$$I_0 := [a_0; b_0] := [1; 2].$$

Como aproximación inicial, vamos a elegir al punto medio

$$c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2} = 1{,}5,$$

que asegura que el error $|\alpha - c_0|$ que cometemos al aproximar α por c_0 es $|\alpha - c_0| \leq 0{,}5$.

Supongamos que, a los efectos del modelo en consideración, la aproximación $c_0 := 1{,}5$ de la solución (2.1) es demasiado grosera. A fin de mejorar nuestra aproximación inicial c_0, “partimos” a I_0 “por c_0” y nos quedamos con la mitad izquierda $[a_0; c_0]$, o derecha $[c_0; b_0]$, según sea el caso, en la cual la función f cambia de signo (ver la Figura 2.1). En este caso $f(c_0) > 0$, con lo cual definimos

$$I_1 := [a_1; b_1] := [1; 1{,}5].$$

Como antes, nuestra nueva aproximación es

$$c_1 := \frac{a_1 + b_1}{2} = 1{,}25,$$

y tenemos que $|\alpha - c_1| < 0{,}25$.

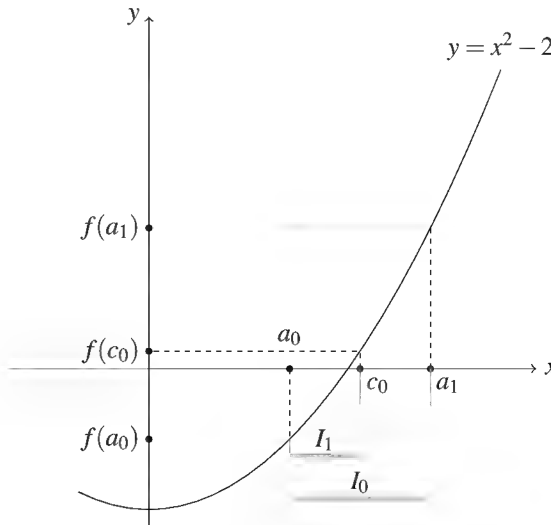


Figura 2.1.: Los dos primeros intervalos del método de bisección.

En la siguiente etapa, aplicamos la misma idea a I_1: dado que $f(c_1) < 0$, definimos

$$I_2 := [a_2, b_2] := [c_1, b_1] = [1{,}25; 1{,}5], \quad c_2 := \frac{a_2 + b_2}{2} = 1{,}375.$$

Tabla 2.1.: El método de bisección aplicado a $x^2 - 2 = 0$.

n	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$
0	1.00000000000	2.00000000000	1.50000000000	0.250000000
1	1.00000000000	1.50000000000	1.25000000000	-0.437500000
2	1.25000000000	1.50000000000	1.37500000000	-0.109375000
3	1.37500000000	1.50000000000	1.43750000000	0.066406250
4	1.37500000000	1.43750000000	1.40625000000	-0.022460938
5	1.40625000000	1.43750000000	1.42187500000	0.021728516
6	1.40625000000	1.42187500000	1.41406250000	-0.000427246
7	1.41406250000	1.42187500000	1.41796875000	0.010635376
8	1.41406250000	1.41796875000	1.41601562500	0.005100250
9	1.41406250000	1.41601562500	1.41503906250	0.002335547
10	1.41406250000	1.41503906250	1.41455078125	0.000953913

Este proceso, conocido como el **método de bisección**, puede proseguirse indefinidamente, obteniéndose de esta manera “mejores” **soluciones aproximadas** c_n de (2.1).

Más precisamente, el método de bisección nos provee una estrategia que nos permite refinar sucesivamente el intervalo inicial I_0 con intervalos $I_n := [a_n; b_n]$ que siempre contienen una solución de (2.1), de modo tal que la longitud de los mismos “converge” a 0. Si c_n es el punto medio de I_n para cada $n \geq 0$, es de esperar que c_n resulte una “mejor” solución aproximada de (2.1) a medida que crece n.

Los primeros 10 intervalos con sus correspondientes puntos medios están listados en la Tabla 2.1. La cuarta columna (donde los resultados han sido redondeados a 9 dígitos decimales) es fundamental para **verificar** que efectivamente estamos resolviendo de forma aproximada (2.1). Más precisamente, dado que se trata de determinar una raíz positiva de la función f, el hecho de que las entradas en la cuarta columna “converjan” a 0 representa una **fuerte indicación** de que los términos c_n resuelven progresivamente (2.1). Cabe destacar que este proceso **no es monótono**, es decir, no es cierto que cada nueva aproximación mejora la anterior, aunque una mirada de conjunto parecería indicar que globalmente la aproximación tiende a mejorar.

2.1.1. La convergencia del método de bisección

La Tabla 2.1 sugiere que el valor absoluto de $f(c_n)$ “converge” a 0, con lo cual los términos c_n van resolviendo “progresivamente” (2.1). Justificamos (parcialmente) esta afirmación. Mediante el método de bisección hemos producido una **sucesión** de intervalos (con extremos racionales) $(I_n)_{n>0}$ **encajados**, es decir, tenemos que

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots .$$

Asimismo, cabe destacar que $b_n - a_n = 2^{\ n}$ para cada $n \geq 0$, dado que $b_0 - a_0 = 1$ y la longitud de cada nuevo intervalo $I_n := [a_n, b_n]$ es la mitad del anterior. Por último, la elección de cada intervalo

I_n se realiza de forma tal que $a_n^2 - 2 < 0 < b_n^2 - 2$. Así, en resumen, la sucesión de intervalos $(I_n)_{n>0}$ satisface las siguientes propiedades:

1. $b_n - a_n = 2^{-n}$,

2. $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.

Analizamos ahora la sucesión de puntos medios $(c_n)_{n>0}$. Siendo a_n, b_n y c_n racionales positivos tales que $a_n < c_n < b_n$ y $f : x \mapsto x^2 - 2$ una función estrictamente creciente en los racionales positivos, deducimos que

$$a_n^2 - 2 < c_n^2 - 2 < b_n^2 - 2.$$

Dado que $a_n^2 - 2 = f(a_n) < 0$ y $b_n^2 - 2 = f(b_n) > 0$, concluimos que

$$|c_n^2 - 2| < \text{máx}\{b_n^2 - 2, 2 - a_n^2\} \leq b_n^2 - 2 + 2 - a_n^2 = b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n).$$

Por otro lado, la suma $a_0 + b_0$ es igual a 3, en tanto que $a_n \leq b_n \leq 1{,}5$ para $n \geq 1$. En consecuencia, $a_n + b_n \leq 3$ para cada $n \geq 0$. Concluimos que $|c_n^2 - 2| \leq 3/2^n$, es decir, tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.1.1. *La estimación $|c_n^2 - 2| \leq 3 \cdot 2^{-n}$ es válida para cada $n \geq 0$.*

De este resultado deducimos que el valor absoluto de $f(c_n)$ puede hacerse "tan chico como uno quiera" con tal de tomar n suficientemente grande. Por ejemplo, si elegimos $\varepsilon := 0{,}1$, teniendo en cuenta la estimación $|c_n^2 - 2| \leq 3 \cdot 2^{-n}$ vemos que $|c_n^2 - 2| \leq 0{,}1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $3 \cdot 2^{-n} \leq 0{,}1$, o equivalentemente, tal que $30 \leq 2^n$. Así, para $n \geq 5$, el punto c_n satisface la estimación $|c_n^2 - 2| < 0{,}1$. De todas maneras, si miramos la tabla y comparamos los valores listados con la aproximación de $\sqrt{2}$ de una calculadora, vemos que en realidad esta estimación se satisface para cada $n \geq 3$.

Ejercicio 2.1.2. *Para cada uno de los valores $\varepsilon := 0{,}01$ y $\varepsilon := 0{,}000001$, hallar n_0 tal que $|f(c_n)| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. ¿Son óptimos los valores de n_0 hallados?*

Ejercicio 2.1.3. *Repetir el análisis del ejercicio anterior para un intervalo $[a, b]$ arbitrario con $f(a) < 0 < f(b)$:*

- *obtener estimaciones para $|c_n^2 - 2|$ en función de la longitud del intervalo $[a, b]$,*
- *para $\varepsilon := 0{,}1$, $\varepsilon := 0{,}01$ y $\varepsilon := 0{,}000001$, hallar n_0 tal que $|f(c_n)| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$.*

Ejercicio 2.1.4. *Sea $g : x \mapsto x^2 + x - 1$. Observamos que $g(0) = -1 < 0 < g(1) = 1$, por lo que es "esperable" que la ecuación $g(x) = 0$ tenga una solución α con $0 < \alpha < 1$.*

Sea $J_n := [r_n, s_n]$ el n–ésimo intervalo que se obtiene aplicando el método de bisección a la ecuación $g(x) = 0$, comenzando con el intervalo $J_0 := [0, 1]$, y sea $t_n := (r_n + s_n)/2$.

1. *Demostrar que si $0 \leq \alpha < \beta$, entonces $g(\alpha) < g(\beta)$.*

2. *Demostrar que $|t_n^2 + t_n - 1| < \text{máx}\{s_n^2 + s_n - 1, 1 - r_n - r_n^2\}$ para cada $n \geq 0$.*

3. *Deducir que $|t_n^2 + t_n - 1| \leq 3(s_n - r_n)$ para cada $n \geq 0$.*

4. *Concluir que* $|t_n^2 + t_n - 1| \leq 3 \cdot 2^{-n}$ *para cada* $n \geq 0$.

5. *Para cada uno de los valores* $\varepsilon := 0{,}01$ *y* $\varepsilon := 0{,}000001$*, hallar* n_0 *tal que* $|g(t_n)| < \varepsilon$ *para* $n \geq n_0$.

2.2. Segundo intento: el método de Newton

En esta sección vamos a desarrollar un método alternativo para "resolver" (2.1), es decir, un método que nos permite resolver de forma aproximada la ecuación (2.1). Como en la sección anterior, a fin de explicar las ideas que nos conducen a dicho método vamos a suponer que existe una solución $\alpha > 0$ de (2.1).

Supongamos que tenemos una aproximación inicial a_0 de α. Teniendo en cuenta que es fácil resolver **ecuaciones lineales**, vamos a reemplazar la función $f(x) := x^2 - 2$ por una función lineal que la aproxime para valores del dominio "cercanos" a a_0, y vamos a buscar la raíz a_1 de esta última. Esta idea de "**linealizar**", es decir, de reemplazar un problema no lineal por uno lineal, es una estrategia general de aproximación, como vamos a ver más adelante.

A modo de ejemplo, supongamos que tenemos la solución aproximada $a_0 = 1{,}5$. Expresemos α en términos de a_0 y el error e_0 que cometemos en dicha aproximación, es decir, en la forma $\alpha = a_0 + e_0 = 1{,}5 + e_0$. Tenemos entonces

$$2 = \alpha^2 = (1{,}5 + e_0)^2 = 1{,}5^2 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot e_0 + e_0^2. \tag{2.2}$$

Suponiendo que la aproximación $a_0 = 1{,}5$ de α que tenemos es "razonablemente buena", el error e_0 resulta significativamente menor que a_0 y α. Si obtenemos una "buena" aproximación para el error e_0, tendremos entonces una "mejor" aproximación para el valor α que deseamos calcular. "Linealizar" en este contexto significa "despreciar" el término cuadrático en e_0 de (2.2), que resulta significativamente menor que los restantes sumandos en (2.2), obteniendo de esta manera la fórmula aproximada

$$2 \approx 1{,}5^2 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot e_0.$$

De esta expresión deducimos inmediatamente la aproximación

$$e_0 \approx -\frac{1{,}5^2 - 2}{2 \cdot 1{,}5} = -\frac{f(1{,}5)}{2 \cdot 1{,}5} = -\frac{f(a_0)}{2a_0}.$$

Así, si el error e_0 que cometemos al aproximar α por a_0 se aproxima por $-f(a_0)/(2a_0)$, sumando a_0 con la aproximación del error e_0 obtenemos una nueva aproximación a_1 de la solución α, esto es,

$$a_1 := a_0 - \frac{f(a_0)}{2a_0} = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{a_0}. \tag{2.3}$$

Prosiguiendo el argumento, expresemos nuevamente a α en términos de a_1 y el error e_1 que cometemos al aproximar a α con a_1, es decir, $e_1 := \alpha - a_1$. Dado que

$$2 = \alpha^2 = (a_1 + e_1)^2 = a_1^2 + 2 \cdot a_1 \cdot e_1 + e_1^2 \approx a_1^2 + 2 \cdot a_1 \cdot e_1,$$

podemos aproximar a e_1 por $(2-a_1^2)/(2a_1) = -f(a_1)/(2a_1)$. Así, sería esperable obtener una mejor aproximación de α que a_1 por medio de

$$a_2 := a_1 - \frac{f(a_1)}{2a_1} = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{a_1}.$$

Prosiguiendo de esta manera, obtenemos una sucesión $(a_n)_{n>0}$, cuyo primer término es $a_0 := 1{,}5$ y está definida de forma recursiva por:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad (n \geq 0). \tag{2.4}$$

El proceso por el cual obtenemos esta sucesión se denomina el **método de Newton**.

El método de Newton también puede deducirse por medio de argumentos geométricos, como vamos a mostrar a continuación. Supongamos nuevamente que tenemos dada una solución aproximada inicial a_0 de la solución α de la ecuación (2.1).

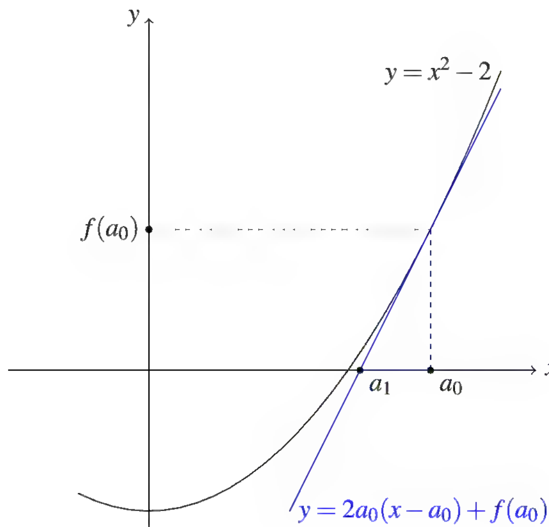


Figura 2.2.: La geometría del método de Newton.

Hemos dicho que la idea era “linealizar” nuestro problema. Para esto, consideramos la recta que “mejor aproxima” el gráfico de la función f en un entorno de nuestra aproximación inicial a_0, es decir, **la recta tangente al gráfico de f en a_0**. Se trata de la recta de ecuación $y = 2a_0(x-a_0) + f(a_0)$, que graficamos en la Figura 2.2. Así, en lugar de hallar una raíz de la función f, hallamos la raíz de la función lineal $x \mapsto 2a_0(x-a_0) + f(a_0)$, esto es, resolvemos la ecuación lineal

$$2a_0(x-a_0) + f(a_0) = 0.$$

Si $a_0 \neq 0$, entonces esta ecuación tiene una única solución, a saber:

$$x = a_0 - \frac{f(a_0)}{2a_0}.$$

Éste es precisamente el valor que elegimos como nueva aproximación de (2.1), que coincide con la expresión (2.3), que obtenemos por medio de un argumento "analítico".

Ejercicio 2.2.1. *Recordamos que, en el Ejercicio 2.1.4, hemos visto que es esperable que la ecuación $g(x) = 0$ tenga una solución α con $0 < \alpha < 1$, siendo $g : x \mapsto x^2 + x - 1$.*

1. *Supongamos que existe tal solución α y sea a_0 una "aproximación" de α. Si $e_0 := \alpha - a_0$, demostrar que $a_0^2 + a_0 - 1 + 2a_0e_0 + e_0 = g(a_0) + g'(a_0)e_0 \approx 0$, si se desprecian términos cuadráticos en e_0.*

2. *Concluir que, si $g'(a_0) \neq 0$, entonces $e_0 \approx -g(a_0)/g'(a_0)$.*

3. *Deducir que es "esperable" que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ definida por*

$$a_{n+1} := a_n - \frac{g(a_n)}{g'(a_n)}$$

provea aproximaciones "progresivamente mejores" de la solución α de $g(x) = 0$. Ésta es la sucesión del método de Newton aplicada a la ecuación $g(x) = 0$.

Ejercicio 2.2.2. *Generalizamos los argumentos del ejercicio previo. Sea $h : x \mapsto ax^2 + bx + c$ una función cuadrática tal que existe una solución α de la ecuación $h(x) = 0$.*

1. *Sea a_0 una aproximación de α. Si $e_0 := \alpha - a_0$, demostrar que $h(a_0) + h'(a_0)e_0 \approx 0$, si se desprecian términos cuadráticos en e_0. Concluir que, si $h'(a_0) \neq 0$, entonces $e_0 \approx -h(a_0)/h'(a_0)$.*

2. *Deducir que es "esperable" que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ definida por*

$$a_{n+1} := a_n - \frac{h(a_n)}{h'(a_n)}$$

provea aproximaciones "progresivamente mejores" de la solución α de $h(x) = 0$. Ésta es la sucesión del **método de Newton aplicada a la ecuación cuadrática general** $h(x) = 0$.

2.2.1. La convergencia del método de Newton

A fin de analizar el comportamiento de la sucesión $(a_n)_{n>0}$ comenzamos estudiando los primeros valores obtenidos, que mostramos en la Tabla 2.2. Observamos que solo 4 iteraciones del método, representado por los valores de la primer columna de dicha tabla, son suficientes para conseguir un valor a_3 que se "comporta como una raíz de f", en el sentido de que, **redondeado a 9 dígitos decimales**, $f(a_3)$ "es" 0.

Tabla 2.2.: El método de Newton aplicado a $x^2 - 2 = 0$.

n	a_n	$f(a_n)$
0	1.50000000000000	0.250000000
1	1.41666666666667	0.006944444
2	1.41421568627451	0.000006007
3	1.41421356237469	0.000000000
4	1.41421356237309	0.000000000
5	1.41421356237309	0.000000000
6	1.41421356237309	0.000000000

Ahora discutimos en qué sentido la sucesión $(a_n)_{n>0}$ resuelve la ecuación (2.1). Para esto, nuevamente, vamos a estudiar el comportamiento de la sucesión $(a_n^2 - 2)_{n>0}$. Dado que los sucesivos términos de $(a_n)_{n>0}$ se obtienen mediante la fórmula “recursiva” (2.2), resulta natural comparar $a_{n+1}^2 - 2$ con $a_n^2 - 2$. En tal sentido, tenemos la relación

$$a_{n+1}^2 - 2 = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\right)^2 - 2 = \frac{(a_n^2 - 2)^2}{4a_n^2}, \tag{2.5}$$

válida para valores positivos de a_n. Esta identidad es fundamental a fin de determinar el comportamiento de $(a_n^2 - 2)_{n>0}$.

Lema 2.2.3. *Si* $0 < a_n \leq 2$ *y* $a_n^2 > 2$, *entonces:*

1. $0 < a_{n+1} \leq 2$ y $a_{n+1}^2 > 2$.

2. $a_{n+1}^2 - 2 < \frac{1}{8}(a_n^2 - 2)^2$.

Demostración. La desigualdad $a_{n+1} > 0$ se deduce directamente de la hipótesis $a_n > 0$ y la definición (2.4). Por otro lado, la desigualdad $a_{n+1}^2 > 2$ es consecuencia directa de la identidad (2.5). A fin de demostrar que $a_{n+1} \leq 2$, observamos que la hipótesis $0 < a_n \leq 2$ implica $|a_n^2 - 2| \leq 2$, y por lo tanto

$$a_{n+1}^2 - 2 = \frac{(a_n^2 - 2)^2}{4a_n^2} \leq \frac{4}{4a_n^2} < \frac{1}{2}.$$

Se deduce que $a_{n+1}^2 \leq 2 + 1/2 < 4$, de donde concluimos que $a_{n+1} < 2$.

En cuanto a la segunda afirmación, combinando la hipótesis $a_n^2 > 2$ con (2.5) resulta

$$a_{n+1}^2 - 2 = \frac{(a_n^2 - 2)^2}{4a_n^2} < \frac{1}{8}(a_n^2 - 2)^2,$$

lo cual concluye la demostración. □

Concluimos que la iteración (2.4) está bien definida para cualquier valor $0 < a_0 \leq 2$ tal que $a_0^2 > 2$. Más aún, el valor $f(a_n)$ se “acerca progresivamente” a 0 a medida que n crece, como puede constatarse en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 2.2.4. *En las condiciones del Lema 2.2.3, demostrar que* $(a_n)_{n>0}$ *satisface la estimación* $|a_n^2 - 2| < \frac{1}{4^n}|a_0^2 - 2|$ *para cada* $n \geq 0$. *Para* $\varepsilon := 0{,}1$, $\varepsilon := 0{,}001$ *y* $\varepsilon := 0{,}0000000001$, *hallar* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de modo que* $|f(a_n)| < \varepsilon$ *para cada* $n \geq n_0$.

Ejercicio 2.2.5. *En las condiciones del Lema 2.2.3, ¿puede encontrar una mejor estimación para* $|a_n^2 - 2|$ *sabiendo que* $|a_0^2 - 2| \leq \frac{1}{2}$ *(como en la Tabla 2.2)? En tal caso, explique la diferencia entre las Tablas 2.1 y 2.2.*

Ejercicio 2.2.6. *¿Qué puede decirse de (2.4) para valores* $a_0 > 0$ *que satisfacen* $a_0^2 < 2$*? ¿Y para* $a_0 > 2$*?*

Ejercicio 2.2.7. *Repetir el análisis de los ejercicios anteriores para la ecuación* $x^2 - a = 0$*, donde* a *es un racional positivo que no es un cuadrado.*

Ejercicio 2.2.8. *Consideramos nuevamente la ecuación* $g(x) = 0$ *de los Ejercicios 2.1.4 y 2.2.1, siendo* $g : x \mapsto x^2 + x - 1$. *En el Ejercicio 2.2.1 demostramos que la sucesión* $(a_n)_{n>0}$ *del método de Newton aplicado a esta ecuación es:*

$$a_{n+1} = a_n - \frac{g(a_n)}{g'(a_n)} = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n + 1}.$$

1. *Demostrar que* $g(a_{n+1}) = (g(a_n))^2/(g'(a_n))^2$ *para cada* $n \geq 0$.
2. *Demostrar que si* $1/2 \leq a_n \leq 1$, *entonces* $0 \leq g(a_{n+1}) \leq (g(a_n))^2/4 \leq |g(a_n)|/4$.
3. *Concluir que si* $1/2 \leq a_0 \leq 1$, *entonces* $|g(a_n)| \leq |g(a_0)|/4^{\ n}$ *para cada* $n \geq 1$.

2.2.2. El método de Newton como un problema de equilibrio

De acuerdo a lo dicho en la sección previa, por medio del método de Newton hemos obtenido una sucesión $(a_n)_{n>0}$, definida de manera recursiva, que resuelve (de forma aproximada) la ecuación (2.1). Esta sucesión, comenzando en la aproximación inicial $a_0 := 1{,}5$, puede verse como un **"proceso evolutivo"**: cada nuevo término a_{n+1} se obtiene aplicando una "ley de evolución", la determinada por la función

$$h : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x},$$

al término anterior a_n, es decir,

$$a_{n+1} := h(a_n) = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad (n \geq 0).$$

Gráficamente, podemos describir este proceso de la siguiente manera: comenzando en $a_0 := 1{,}5$, obtenemos el término $a_1 := h(a_0)$ como la primera coordenada del punto de intersección de la recta de ecuación $y = h(a_0)$ con la recta $y = x$ (ver el gráfico de la izquierda en la Figura 2.3). Así sucesivamente, la "evolución" del método puede verse como una poligonal (ver el gráfico de la derecha en la Figura 2.3), cuyos segmentos tienen una longitud cada vez menor. Así, gráficamente, la sucesión $(a_n)_{n>0}$ **"converge" al "estado de equilibrio"** del proceso, esto es, el punto α en el cual $\alpha = h(\alpha)$. Decimos que se trata de un "estado de equilibrio" dado que, si comenzamos el

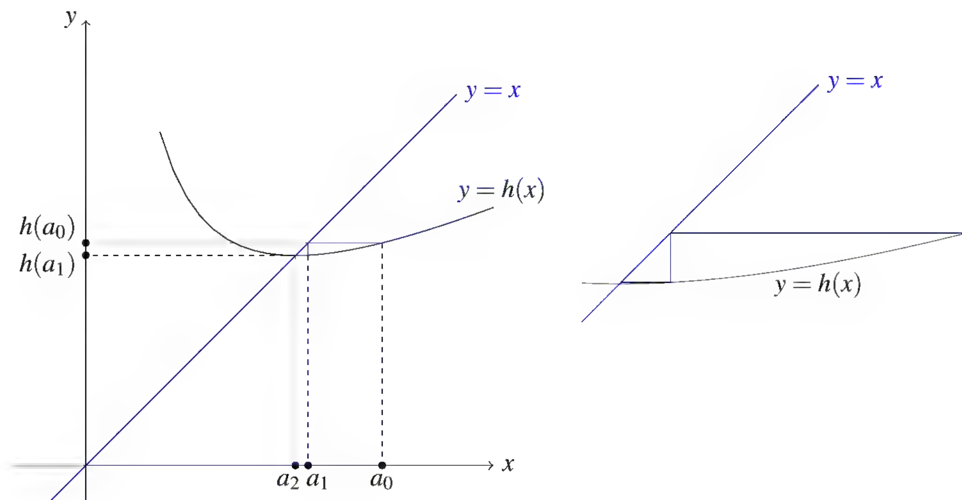


Figura 2.3.: La sucesión del método de Newton como problema de evolución.

proceso cuya evolución describe la función h en el punto $b_0 := \alpha$, entonces $b_n = \alpha$ para cada $n \geq 0$, dado que $h(\alpha) = \alpha$. Así, el proceso se encuentra “en equilibrio” en α.

Ahora demostramos que efectivamente la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ converge a un estado de equilibrio del proceso que describe la función h. Para esto analizamos el comportamiento asintótico de $|h(a_n) - a_n|$. Tenemos que

$$|h(a_n) - a_n| = \left| \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - a_n \right| = \left| \frac{1}{a_n} - \frac{a_n}{2} \right| = \frac{1}{2a_n} |a_n^2 - 2|.$$

El Lema 2.2.3 asegura que $a_n^2 > 2$ para cada $n \geq 0$, de lo cual, teniendo en cuenta que $a_n > 0$ para cada $n \geq 0$, concluimos que $a_n > 1$. Por otro lado, en el Ejercicio 2.2.4 vemos que $|a_n^2 - 2| \leq 4^{-n}|a_0^2 - 2| = 4^{-n-1}$. Combinando estas dos estimaciones obtenemos el siguiente resultado, que asegura que el valor absoluto $|h(a_n) - a_n|$ puede hacerse “tan chico como uno quiera” con tal de elegir n suficientemente grande.

Lema 2.2.9. *Si $(a_n)_{n \geq 0}$ es la sucesión definida por $a_0 := 1{,}5$ y $a_{n+1} := a_n/2 + 1/a_n$ $(n \geq 0)$, entonces, para cada $n \geq 0$, tenemos $|h(a_n) - a_n| \leq 4^{-n}$.*

Ejercicio 2.2.10. *Para $\varepsilon := 0{,}1$, $\varepsilon := 0{,}0001$ y $\varepsilon := 0{,}0000001$, hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $|h(a_n) - a_n| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$.*

¿Qué relación tiene esto con la ecuación (2.1)? Cada estado de equilibrio del proceso que define la función h resuelve la ecuación (2.1). En efecto, un “estado de equilibrio” β es, por definición, un punto que satisface la condición

$$\beta = h(\beta) = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\beta}.$$

Multiplicando la igualdad precedente por β vemos que $\beta^2 = \frac{\beta^2}{2} + 1$, es decir, $\beta^2 = 2$.

Ejercicio 2.2.11. *Demostrar que cada estado de equilibrio del proceso que define la función $h_1 : x \mapsto 2x^2 + x - 4$ es una solución de la ecuación (2.1).*

2.3. La relación con un problema de minimización

Consideremos ahora un problema del tipo (1.8): determinar los mínimos (locales) de la siguiente función (ver la Figura 2.4):

$$g : x \mapsto x^3 - 6x. \tag{2.6}$$

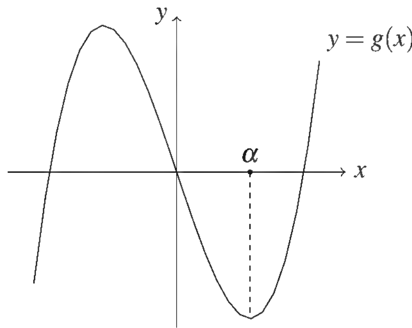


Figura 2.4.: El gráfico de la función g y el punto α en el cual alcanza un mínimo local.

De los cursos de cálculo sabemos que, si la función g alcanza un extremo local en un punto α, entonces este punto anula la derivada de g, es decir, satisface la condición $g'(\alpha) = 0$ (Corolario 0.3.3). En este caso tenemos $g'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$, con lo que nuestro problema de optimización (2.6) se reduce al problema (2.1) de resolver la ecuación $x^2 - 2 = 0$. En particular, a fin de aproximar la solución positiva de $x^2 - 2 = 0$ podemos aplicar, partiendo de $a_0 := 1{,}5$ como en la Sección 2.2, la iteración (2.5) del método de Newton, es decir,

$$a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad (n \geq 0).$$

Observamos que esta iteración se obtuvo a partir de una **aproximación lineal** de la derivada g', que de por sí corresponde a la "linealización" de la función original g (en un sentido que vamos a discutir más adelante). Por lo tanto, corresponde a una **aproximación cuadrática** de la función g, como vamos a constatar a continuación.

Argumentando del mismo modo que en la Sección 2.2, supongamos que $a_0 := 1{,}5$ es una solución aproximada del problema de optimización (2.6), y denotemos por $e_0 := \alpha - a_0$ el error que cometemos en dicha aproximación, de modo que $\alpha = a_0 + e_0$. Nuestro problema entonces consiste en determinar una aproximación de e_0. Si suponemos que e_0 es "chico" en relación a a_0 y α,

tenemos que

$$g(\alpha) = g(a_0 + e_0) = (a_0 + e_0)^3 - 6(a_0 + e_0) = a_0^3 - 6a_0 + (3a_0^2 - 6)e_0 + (3a_0)e_0^2 + e_0^3.$$

Dado que e_0 es "chico" en relación a a_0 y α, podemos "despreciar" el término e_0^3 en esta expresión, obteniendo la siguiente **aproximación cuadrática** del valor mínimo $g(\alpha)$:

$$g(\alpha) \approx a_0^3 - 6a_0 + (3a_0^2 - 6)e_0 + (3a_0)e_0^2.$$

La expresión $a_0^3 - 6a_0 + (3a_0^2 - 6)e_0 + (3a_0)e_0^2$ es de hecho una función cuadrática convexa en e_0, cuyo único mínimo se obtiene en $\widehat{e}_0 = -\frac{3a_0^2 - 6}{6a_0}$. En consecuencia, proponemos la aproximación

$$a_1 = a_0 + \widehat{e}_0 = a_0 - \frac{3a_0^2 - 6}{6a_0} = \frac{1}{a_0} + \frac{a_0}{2},$$

que **coincide con la aproximación del método de Newton** aplicado a la ecuación $g'(x) = 0$. En consecuencia, la sucesión $(a_n)_{n>0}$ que obtenemos prosiguiendo con este argumento es la definida por la iteración (2.5) del método de Newton:

$$a_{n+1} := \frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2} \quad (n \geq 0).$$

Es importante destacar la analogía entre los argumentos que nos condujeron a la deducción del método de Newton de la Sección 2.2 y la interpretación de la aplicación del método de Newton a la ecuación $g'(x) = 0$ de la presente sección. En efecto, el problema que consideramos en la Sección 2.2 es el de la resolución de una ecuación del tipo $f(x) = 0$. Dada una aproximación a_0 a una solución α de dicha ecuación, **reemplazamos** la ecuación original $f(x) = 0$ por una ecuación **lineal**, cuya solución, que se obtiene de forma explícita, nos provee una mejor aproximación que a_0. En esta sección, dada una aproximación a_0 a un mínimo (local) de una función g, **reemplazamos el problema de minimización original por uno cuadrático**, que se resuelve en forma explícita, y consideramos la solución a_1 del problema cuadrático como la nueva aproximación de α. En este sentido, observamos que es conveniente considerar una aproximación cuadrática en lugar de una aproximación lineal de g, dado que las funciones cuadráticas alcanzan un valor "óptimo" (máximo o mínimo), fácil de determinar, en tanto que las lineales no.

Ejercicio 2.3.1. *El objetivo de los próximos dos ejercicios es obtener una demostración de que el argumento previo es válido para una clase amplia de problemas.*

Sean r y δ dos valores de modo tal que δ es "significativamente menor" que r.

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, demostrar que $(r+\delta)^3 \approx r^3 + 3r^2\delta$ si se desprecian términos de orden al menos cuadrático en δ, y $(r+\delta)^3 \approx r^3 + 3r^2\delta + 3r\delta^2$ si se desprecian términos de orden al menos cúbico en δ.*

2. *Si $p := ax^3 + bx^2 + cx + d$, concluir que $p(r+\delta) \approx p(r) + p'(r)\delta$ si se desprecian términos de orden al menos cuadrático en δ, y $p(r+\delta) \approx p(r) + p'(r)\delta + \frac{1}{2}p''(r)\delta^2$ si se desprecian términos de orden al menos cúbico en δ.*

Ejercicio 2.3.2. *Supongamos que* α *es un mínimo local de una función polinomial* $p := ax^3 + bx^2 + cx + d$. *Sea* a_0 *una aproximación de* α *de modo que el error* $e_0 := \alpha - a_0$ *es "significativamente menor" que* α *y* a_0. *En particular,* a_0 *es también una "buena" aproximación de la solución* α *de la ecuación* $p'(x) = 0$.

1. *Determinar, de acuerdo con el Ejercicio 2.2.2, el término general de la sucesión del método de Newton aplicado a la ecuación* $p'(x) = 0$*, comenzando con* a_0.

2. *Determinar la expresión del término general de la sucesión que consiste de los extremos de las expresiones cuadráticas en* e_n *que se obtienen a partir de* $p(a_n + e_n)$*, despreciando términos de orden al menos cúbico en* e_n*, comenzando en* a_0.

3. *¿Cuál es la relación entre ambas expresiones?*

3. Un problema general: resolver $f(x) = 0$

Luego de haber estudiado el problema (2.1), retomamos los problemas generales (1.7), (1.8) y (1.9): resolver $f(x) = 0$, determinar $\min_{x \in A} f(x)$ o los estados de equilibrio $f(x) = x$. Como expresamos en el Capítulo 2, y confirmamos con nuestra discusión sobre la solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ y la minimización de la función $x^3 - 6x$, tanto desde el punto vista teórico (debido a la inexistencia de una "forma cerrada" o "analítica" de las soluciones de (1.7), (1.8) o (1.9)), como desde el punto de vista práctico (la poca utilidad de expresiones analíticas de las soluciones en algunos casos en los que éstas están disponibles), la **solución efectiva** de nuestros problemas generales requiere de **procesos de aproximación**. Esto nos plantea inmediatamente dos preguntas:

- ¿Con qué aproximar?
- ¿Cuándo aproximar?

3.1. ¿Con qué aproximar?: Sucesiones

En el Capítulo 2 hemos descripto dos herramientas que nos permiten obtener aproximaciones de la solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ y el mínimo de $x^3 - 6x$: el método de bisección y el método de Newton. Ambos métodos consisten en un **proceso iterativo** mediante el cual se construye una **sucesión** (infinita) **de aproximaciones**. Recordamos que, por una **sucesión (infinita) de racionales**, vamos a entender una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, en la cual la imagen $a(n)$ es lo que denominamos el n–ésimo término de la sucesión y lo notamos por a_n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Esto es una característica habitual de todos los métodos de aproximación: si pensamos que nuestro problema proviene de la **modelización** de un fenómeno físico dado, que involucra ciertas cantidades de magnitudes físicas, el grado de **precisión** deseable de una aproximación dada depende fuertemente de las unidades con que se miden dichas magnitudes (por caso, no es lo mismo cometer un error de 0.01 kilómetros que de 0.01 milímetros en una cierta medición). Así, es difícil decidir a priori cuál es el orden de aproximación "conveniente", y es por ende necesario tener aproximaciones **de grado de precisión arbitrario** de la magnitud en consideración. Es entonces habitual que el procedimiento de solución de un problema dado sea "independiente de los órdenes de magnitud", y por lo tanto exhiba una sucesión de aproximaciones de todos los órdenes de precisión posibles. A su vez, queremos que este fenómeno ocurra **en forma progresiva**, de manera que para cada orden de precisión sea posible identificar un nivel de aproximación a partir del cual dicha precisión sea lograda.

¿Cómo determinamos si una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada provee "buenas" aproximaciones de la solución de una ecuación $f(x) = 0$? De acuerdo a lo que hemos visto, como generalmente no conocemos la solución de la ecuación $f(x) = 0$, **un primer dato que podemos analizar** es si la

Tabla 3.1.: El método de bisección aplicado a $x^2 - 2 = 0$.

n	c_n	$f(c_n)$
0	1.50000000000	0.250000000
1	1.25000000000	-0.437500000
2	1.37500000000	-0.109375000
3	1.43750000000	0.066406250
4	1.40625000000	-0.022460938
5	1.42187500000	0.021728516
6	1.41406250000	-0.000427246
7	1.41796875000	0.010635376
8	1.41601562500	0.005100250
9	1.41503906250	0.002335547
10	1.41455078125	0.000953913

sucesión $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ se "acerca" progresivamente a 0, en cuyo caso tendremos una indicación de que nuestra sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **progresivamente resuelve la ecuación** $f(x) = 0$. En otras palabras, el valor $f(a_n)$ constituye una medida de la "precisión" de una aproximación a_n: tendremos una "buena aproximación" a_n si el valor de $f(a_n)$ es "cercano" a 0. Formalizamos un poco esto: si $\varepsilon > 0$ es una "tolerancia" dada, entonces deberíamos tener una aproximación, digamos a_n, que resuelva la ecuación $f(x) = 0$ con tolerancia ε, es decir, debería existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(a_n)| < \varepsilon$. Más aún, dado que queremos que esto ocurra en forma progresiva, debería existir una "etapa" en nuestro proceso a partir de la cual nuestra aproximación **siempre** resuelve $f(x) = 0$ con tolerancia ε, es decir, debería existir $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir del cual $|f(a_n)| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$. En tal caso, vamos a decir que $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** a 0.

Por ejemplo, consideremos nuevamente la sucesión $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ obtenida a partir de la aplicación del método de bisección a la ecuación $x^2 = 2$ de la Sección 2.1. En la Tabla 3.1 listamos los valores de c_n y $f(c_n)$ para $n = 0, \ldots, 10$.

Fijemos la precisión $\varepsilon := 0{,}01$. De acuerdo con la Tabla 3.1, tenemos que $|f(c_n)| < 0{,}01$ para $n = 6, 8, 9, 10$. Por lo tanto, si fuera $|f(c_n)| < 0{,}01$ para $n \geq 11$, concluiríamos que a partir de $n_0 := 8$ se satisface la condición: $|f(c_n)| < 0{,}01$ para $n \geq n_0$. Y de hecho, podemos garantizar que $|f(c_n)| < 0{,}01$ para $n \geq 11$ gracias a la estimación $|f(c_n)| < 3/2^n$ del Lema 2.1.1, ya que, si $n \geq 11$, entonces

$$|f(c_n)| < \frac{3}{2^n} \leq \frac{3}{2^{11}} < 0{,}01.$$

Observamos que $|f(c_6)| < 0{,}01$, pero no podemos elegir $n_0 := 6$, dado que $|f(c_7)| \geq 0{,}01$. En tal sentido, vemos que la convergencia de la sucesión $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a 0 se da de forma "progresiva", pero **no es un proceso "monótono"**: puede ocurrir que un valor determinado de la sucesión, en este caso $f(c_7)$, tenga valor absoluto mayor que otro posterior, en este caso $f(c_8)$, sin que esto desmienta la convergencia a 0 de la sucesión en consideración.

3.1.1. Sucesiones que convergen a 0

Nuestra discusión anterior nos conduce a la siguiente definición.

Definición 3.1.1 (Sucesión que converge a 0). *Decimos que una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números racionales* **converge a 0**, *y escribimos* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *si para cada racional* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_n| < \varepsilon$ *para cada* $n \geq n_0$.

A fin de ilustrar el concepto de sucesión convergente a 0 analizamos un ejemplo básico, aunque sumamente importante para lo que sigue: el de la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$. Afirmamos que la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, para lo cual necesitamos el siguiente lema, que demuestra que $\mathbb{Q}$ es lo que se conoce como un **cuerpo arquimediano** (propiedad que, si bien parece muy natural, no se satisface necesariamente en un cuerpo arbitrario, como vamos a ver en la Sección 9.A.3).

Lema 3.1.2 (Arquimedianidad de $\mathbb{Q}$). *Todo racional estrictamente positivo es mayor que* $1/n$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $q = r/s$ con $r, s \in \mathbb{N}$. Entonces $s \leq rs$, y por lo tanto, $1/(s+1) < 1/s \leq r/s = q$, es decir, $q > 1/(s+1)$. □

Retomando la cuestión de la convergencia de la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ a 0, por la arquimedianidad de $\mathbb{Q}$ (Lema 3.1.2) tenemos que, dada una tolerancia $\varepsilon > 0$, existe al menos un término $1/n$ de la sucesión que satisface $|1/n| = 1/n < \varepsilon$.

Ejercicio 3.1.3.

1. *Para* $\varepsilon = 0{,}046$, *determinar* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $1/n_0 < 0{,}046$. *¿Qué ocurre con los términos* $1/n$ *para* $n \geq n_0$*? Hacer lo mismo con* $\varepsilon = 0{,}0037$ *y* $\varepsilon = 0{,}00004$.
2. *¿Es posible establecer, para* $\varepsilon > 0$ *arbitrario, una condición sobre* n_0 *que garantice que* $1/n < \varepsilon$ *para cada* $n \geq n_0$*?*

Podemos ahora demostrar nuestra afirmación.

Lema 3.1.4. *La sucesión* $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a 0.*

Demostración. Sea ε un racional positivo cualquiera. Por la arquimedianidad de $\mathbb{Q}$ (Lema 3.1.2) resulta que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$, lo que implica que $1/n < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$. Concluimos que $|1/n| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$, lo cual demuestra nuestra afirmación. □

Con ideas similares es posible establecer la convergencia a 0 de sucesiones "sencillas", como las de los próximos ejemplos y ejercicios.

Ejemplo 3.1.5. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la sucesión definida por* $a_n := 1/n^2$. *Sea* ε *un racional positivo arbitrario y veamos si existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|1/n^2| < \varepsilon$ *para cada* $n \geq n_0$. *Para esto, observamos que* $|1/n^2| = 1/n^2 \leq 1/n$. *Por lo tanto, si elegimos* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de modo que resulte* $1/n_0 < \varepsilon$, *para cada* $n \geq n_0$ *tenemos que*

$$\left|\frac{1}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Así vemos que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a 0.*

Ejemplo 3.1.6. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_n := 1/(5n-2n^2)$. Dado un racional positivo arbitrario ε, se trata de determinar n_0 de modo que $|a_n| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$. Si $n \geq 5$, entonces*

$$|a_n| = \frac{1}{2n^2-5n} \leq \frac{1}{n^2}. \tag{3.1}$$

Así, aplicando el argumento del Ejemplo 3.1.5 precedente, concluimos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \tag{3.2}$$

para cada $n \geq n_0$. En consecuencia, si $n \geq \text{máx}\{5, n_0\}$, se satisfacen las condiciones (3.1) y (3.2), y por lo tanto,

$$|a_n| = \frac{1}{2n^2-5n} \leq \frac{1}{n^2} < \varepsilon,$$

lo que prueba que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

Ejercicio 3.1.7. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_n := 1/(n^2+2)$.*

1. *Dado $\varepsilon = 0{,}00042$, encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < 0{,}00042$ para $n \geq n_0$.*
2. *Dado un número racional positivo ε, determinar $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo tal que $a_n < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$.*
3. *Demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

En los ejemplos y ejercicios precedentes se aprecia que, dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de racionales, la búsqueda de un número natural n_0 para cada racional positivo ε de modo tal que resulte $|a_n| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$ puede tornarse una tarea engorrosa, dependiendo de la sucesión en consideración. Por tal motivo, es conveniente, siempre que esto sea posible, obtener una expresión explícita de la dependencia de n_0 en términos de ε.

Ejemplo 3.1.8. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_n := (n+3)/(n^2-3n+2)$. A fin de obtener una expresión explícita de $n_0 \in \mathbb{N}$ en términos de ε de forma tal que $|a_n| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$, acotamos superiormente $|a_n|$ de modo de simplificar su expresión.*

Para esto, observamos que $n^2-3n \geq n^2/2$ para $n \geq 6$, de donde concluimos que

$$|a_n| = \frac{n+3}{n^2-3n+2} \leq \frac{n+3}{n^2/2+2} \leq \frac{3n}{n^2/2} = \frac{6}{n}.$$

Así, dado un racional $\varepsilon > 0$, vemos que resulta $|a_n| \leq 6/n < \varepsilon$ siempre que $n \geq 6/\varepsilon$.

Definamos $n_0 := \text{máx}\{6, \lceil 6/\varepsilon \rceil\}$, donde $\lceil r \rceil$ es el menor natural mayor o igual que r. Entonces, para $n > n_0$ vemos que $|a_n| < \varepsilon$, lo cual demuestra que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

Ejercicio 3.1.9. *Para las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuyo término general a_n damos a continuación, determinar, para cada racional $\varepsilon > 0$, un número natural n_0 de modo tal que $|a_n| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Concluir que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

$$a_n := \frac{1}{\frac{1}{25}n^2-1}, \quad a_n := \frac{1}{n^2-10n-3}, \quad a_n := \frac{-n^2}{n^2-2n}+1, \quad a_n := \frac{1}{n^2-3} - \frac{1}{5n+3}.$$

Ejercicio 3.1.10. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números racionales que converge a 0.*

1. *Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $b_n := \text{mín}\{|a_1|,\ldots,|a_n|\}$. Demostrar que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*
2. *Sea $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión que consiste de la "media aritmética" (el promedio) de los términos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, $c_n := (a_1+\cdots+a_n)/n$. Demostrar que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Sucesiones geométricas y decrecimiento exponencial

Una clase de sucesiones que aparece frecuentemente es la de las sucesiones geométricas. Dado un número racional λ, una **sucesión geométrica** es una sucesión de la forma $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Una primera información sobre el comportamiento de una sucesión geométrica es el siguiente resultado.

Lema 3.1.11 (Sucesiones geométricas que convergen a 0)**.** *Sea λ un número racional tal que $|\lambda| < 1$. Entonces la sucesión $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Demostración. Dado que $|\lambda^n| = |\lambda|^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, sin pérdida de generalidad podemos suponer $\lambda > 0$. En tal caso, la condición $\lambda < 1$ implica $1/\lambda > 1$. En consecuencia, podemos escribir $1/\lambda = 1+\gamma$ con $\gamma > 0$. Aplicando la desigualdad de Bernoulli (Lema 0.2.2), tenemos que

$$\left|\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n\right| = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n = (1+\gamma)^n \geq 1+n\gamma \geq n\gamma.$$

De esto deducimos que

$$|\lambda^n| = |\lambda|^n \leq \frac{1}{n\gamma}.$$

Sea ε un racional positivo y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/(\varepsilon\gamma)$. De la desigualdad precedente deducimos que $|\lambda^n| \leq 1/(n\gamma) \leq 1/(n_0\gamma) < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$. Concluimos que la sucesión $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. □

En cada una de las sucesiones del Ejercicio 3.1.9, el n–ésimo término viene dado por una expresión explícita en términos de n, lo que nos permite estimarlo adecuadamente a fin de demostrar la convergencia a 0 de la sucesión en consideración. Sin embargo, frecuentemente ocurre en la práctica que la expresión del n–ésimo término de una sucesión, como en la sucesión $(c_n)_{n>0}$ del método de bisección y la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton descriptos en el Capítulo 2, no está explícitamente dada en términos de n o es demasiado complicada como para manipularla con el tipo de acotaciones que hemos utilizado en este capítulo. En tal caso, es necesario recurrir a estimaciones y comparaciones. En relación con estas dos sucesiones, en el Capítulo 2 hemos obtenido las siguientes estimaciones:

- $|c_n^2-2| \leq 3\cdot 2^{-n}$ para cada $n \geq 0$ (Lema 2.1.1);
- $|a_n^2-2| \leq 4^{-n}|a_0^2-2|$ para cada $n \geq 0$ (Ejercicio 2.2.4).

El punto clave es que los miembros derechos en ambas estimaciones son, salvo constantes, sucesiones geométricas que convergen a 0 (Lema 3.1.11). El objetivo del ejercicio a continuación es

completar el análisis del comportamiento de las sucesiones de los métodos de bisección y Newton de las secciones 2.1.1 y 2.2.1 respectivamente.

Ejercicio 3.1.12.

1. *Demostrar que la sucesión* $(c_n^2 - 2)_{n>0}$*, donde* $(c_n)_{n>0}$ *es la sucesión de puntos medios del método de bisección de la Sección 2.1, converge a 0.*

2. *Demostrar que la sucesión* $(a_n^2 - 2)_{n>0}$*, donde* $(a_n)_{n>0}$ *es la sucesión del método de Newton de la Sección 2.2, converge a 0.*

Además de determinar la solución aproximada de nuestros problemas modelo, otra cuestión fundamental del análisis es la de establecer **comparaciones**. Mediante el concepto de sucesión convergente a 0 podemos establecer **comparaciones entre el orden de crecimiento** de dos sucesiones dadas. En efecto, dadas dos sucesiones de racionales positivos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, diremos que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **crece más rápido que** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si la sucesión de cocientes $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Cabe observar que, así como la convergencia a 0 se refiere a un comportamiento "asintótico" o "progresivo" de la sucesión en consideración, del mismo modo el concepto de "crecimiento más rápido" es también de carácter asintótico, y por lo tanto, podemos tener una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que crece más rápido que otra sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sin que ésto sea cierto para los primeros términos de ambas sucesiones.

Ejercicio 3.1.13 ("Las exponenciales crecen más rápidamente que las polinómicas"). *El objetivo del presente ejercicio es establecer una comparación entre una sucesión con crecimiento exponencial y una con crecimiento polinomial.*

1. *Sea* $\lambda > 1$*. Demostrar que existe* $\gamma > 0$ *tal que*

$$\frac{\lambda^n}{n} \geq \frac{1}{n} + \gamma + \frac{n-1}{2}\gamma^2 \geq \frac{n-1}{2}\gamma^2.$$

(Sugerencia: dado que $\lambda > 1$, podemos escribir $\lambda = 1 + \gamma$ con $\gamma > 0$. Aplicar la fórmula del binomio de Newton (Lema 0.2.4) a $(1+\gamma)^n$.) *Concluir que la sucesión* $(n/\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a 0.*

2. *Sea* $\lambda > 1$ *y* $k \geq 2$*. Demostrar que existe* $\gamma > 0$ *tal que*

$$\frac{\lambda^n}{n^k} \geq \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{n^k\,(k+1)!}\gamma^{k+1}.$$

(Sugerencia: expresar a λ como en el ítem anterior y utilizar la fórmula del binomio de Newton, estimando por 0 los sumandos correspondientes a la potencias de γ distintas de la $(k+1)$–ésima.) *Deducir que* $\lambda^n/n^k \geq n\gamma^{k+1}/2^k\,(k+1)!$ *para* $n \geq 2k$ *y concluir que la sucesión* $(n^k/\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a 0 para cada* $k \geq 2$.

Ejercicio 3.1.14. *Demostrar que las sucesiones* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, cuyo término general* a_n *damos a continuación, convergen a 0.*

$$a_n := \frac{n^2}{2^n + 3n}, \qquad a_n := \frac{2^n + n^5}{3^n - 3n^2}, \qquad a_n := \frac{15n^6 - 3}{25n - 2^n}.$$

El criterio del cociente (o de D'Alembert) es un resultado sumamente útil, como vamos a ver en el estudio de series (Sección 9.3), para el estudio de la convergencia a 0 de sucesiones con un decrecimiento de tipo exponencial. En el ejercicio a continuación pedimos demostrar el criterio, en tanto que en el siguiente ejercicio exhibimos algunas aplicaciones del mismo.

Ejercicio 3.1.15 ("Criterio del cociente"). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{Q}$ que satisface la siguiente condición: existen $0 \leq \ell < 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $|a_{n+1}|/|a_n| \leq \ell$ para cada $n \geq n_0$.*

1. *Demostrar que $|a_{n+k}|/|a_n| \leq \ell^k$ para cada $k > 0$ y cada $n \geq n_0$.*
2. *Deducir que $|a_n| \leq \ell^{n-n_0}|a_{n_0}|$ para cada $n \geq n_0$.*
3. *Concluir que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Ejercicio 3.1.16.

1. *Demostrar que la sucesión $(\lambda^n/n!)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 para cada $\lambda > 0$.*
2. *Demostrar que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de término general $a_n := (1+1/n)^n$ es creciente.* (Sugerencia: estudiar el cociente a_{n+1}/a_n y aplicar la desigualdad de Bernoulli (Lema 0.2.2).)
3. *Demostrar que la sucesión $(n!/n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Ejercicio 3.1.17 (Sucesiones con límite infinito). *Diremos que una sucesión de racionales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene* **límite infinito**, *y lo notamos por* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$,[1] *si la sucesión $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

1. *Demostrar que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite infinito si y solo si para cada $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| > M$ para cada $n \geq n_0$.*
2. *Sea λ un racional tal que $|\lambda| > 1$. Demostrar que la sucesión $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite infinito.*
3. *Dadas dos sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, demostrar que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crece más rápido que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y solo si la sucesión $(b_n/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite infinito.*

3.1.2. Sucesiones convergentes

Como puede apreciarse en el Capítulo 2, nos interesa determinar si una sucesión dada de números racionales tiene algún tipo de "comportamiento asintótico", aunque no necesariamente converja a 0. Por ejemplo, como bien sabemos, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuyo término general es

$$a_n := 0,\underbrace{3\ldots3}_{n \text{ veces}} = \frac{\overbrace{3\ldots3}^{n \text{ veces}}}{10^n}$$

[1]Usamos la notación $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ para referirnos a las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con límite infinito tales que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $a_n > 0$ para cada $n \geq n_0$, en tanto que la expresión $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ representa a las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con límite infinito tales que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $a_n < 0$ para cada $n \geq n_0$.

se acerca "progresivamente" a $1/3$, en el sentido de que dado un grado de precisión $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir del cual $|a_n - 1/3| < \varepsilon$. Más precisamente, afirmamos que

$$\frac{1}{3} - a_n = \frac{1}{3 \cdot 10^n} \tag{3.3}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto es evidente para $n = 1$, dado que $1/3 - a_1 = 1/3 - 3/10 = 1/30$. Argumentando de forma inductiva, supongamos que nuestra afirmación es verdadera para cierto $n \in \mathbb{N}$, y veamos que también se satisface para $n+1$. En efecto, tenemos que

$$\frac{1}{3} - a_{n+1} = \frac{1}{3} - a_n + a_n - a_{n+1} = \frac{1}{3 \cdot 10^n} - \frac{3}{10^{n+1}} = \frac{1}{3 \cdot 10^{n+1}}.$$

Esto completa la demostración de (3.3).

Supongamos ahora dado un racional $\varepsilon > 0$. Dado que la sucesión $(1/10^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 (Lema 3.1.11), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|10^{-n}| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$. En consecuencia, si $n \geq n_0$, entonces, de acuerdo con (3.3),

$$\left| a_n - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3 \cdot 10^n} < \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

Dicho de otro modo, la sucesión $(a_n - 1/3)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge a** 0, en cuyo caso diremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge a** $1/3$. Formalizamos estas ideas en la siguiente definición.

Definición 3.1.18. *Decimos que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionales* **converge** *a $\alpha \in \mathbb{Q}$, y escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, si la sucesión $(a_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.*

Ejemplo 3.1.19. *Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n := (2n-3)/(n+2)$. Teniendo en cuenta que $a_n = 2 - 7/(n+2)$ fácilmente concluimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. En efecto, observamos que*

$$|a_n - 2| = \left| \frac{2n-3}{n+2} - 2 \right| = \left| \frac{-7}{n+2} \right| \leq \frac{7}{n}.$$

En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$, tenemos que $|a_n - 2| \leq 7/n < \varepsilon$ siempre que $n \geq n_0 := \lceil 7/\varepsilon \rceil$. Esto muestra que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 2.

Ejemplo 3.1.20. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión*

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

Afirmamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a ningún número racional. En efecto, si convergiera a $\alpha \in \mathbb{Q}$, tendríamos que $0 \leq \alpha \leq 1$ (este hecho, intuitivamente claro, es lo que vamos a denominar el "principio de conservación del número" más adelante (Lema 3.1.40)). Fijemos $\varepsilon := 1/4$ y mostremos que no es cierto que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \alpha| < 1/4$ para cada $n \geq n_0$.

Dado que $0 \leq \alpha \leq 1$, tenemos entonces que $0 \leq \alpha < 1/2$ o $1/2 \leq \alpha \leq 1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $0 \leq \alpha < 1/2$. Observamos que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene infinitos términos a_m de la forma $n/(n+1)$. Si a_m es cualquiera de estos términos de la forma $n/(n+1)$

con $n \geq 3$, entonces tenemos que

$$|a_m - \alpha| = a_m - \alpha \geq a_m - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

En consecuencia, fijado $n_0 \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $m > n_0$ de modo tal que $|a_m - \alpha| \geq 1/4$. Esto muestra que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a α para cada $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Ejercicio 3.1.21. *Demostrar que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n := (3n^2 - 1)/(2n^2 - 3n)$ converge a 3/2.*

Ejercicio 3.1.22. *Sea $r \in \{0, \dots, 9\}$. Demostrar que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n := 0.\underbrace{r\dots r}_{n \text{ veces}}$ converge a $r/9$.*

Ejercicio 3.1.23.

1. *Demostrar que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n := (-1)^n$ no converge a ningún número racional α.*
2. *Estudiar la convergencia de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuyo término general es*

$$a_n := ((-1)^n + 1)\frac{1}{n+1}, \quad a_n := ((-1)^n + 1)\frac{n}{n+1}.$$

Ejercicio 3.1.24. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{Q}$ que converge a $\alpha \in \mathbb{Q}$. Demostrar que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de medias aritméticas, es decir, $b_n := (a_1 + \cdots + a_n)/n$, converge a α.* (Sugerencia: reducir al caso en que $\alpha = 0$ y aplicar el Ejercicio 3.1.10.)

Es interesante notar que la propia notación $\lim_{n\to\infty} a_n$ sugiere que, en caso de que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a un número racional α, su "límite" está unívocamente determinado, de modo que la sucesión no puede converger simultáneamente a otro número racional β. Esto es claro intuitivamente: si los términos de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se "acercan" progresivamente a α, y $\beta \neq \alpha$, entonces la distancia de los términos a_n a β se acerca progresivamente a la distancia de α a β, y por lo tanto no puede acercarse a 0, como exige la definición de convergencia a β. En otras palabras, si los términos a_n se acercan progresivamente a α y a β simultáneamente, entonces necesariamente debe ser $\alpha = \beta$. En términos más precisos, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.1.25 (Unicidad del límite). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a dos números racionales α y β simultáneamente. Entonces $\alpha = \beta$.*

Demostración. Estudiamos la distancia $|\alpha - \beta|$. Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe n_0 tal que $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$ y existe n_1 tal que $|a_n - \beta| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_1$. En consecuencia, tenemos que simultáneamente $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ y $|a_n - \beta| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_2 := \text{máx}\{n_0, n_1\}$. Por lo tanto,

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - a_{n_2} + a_{n_2} - \beta| \leq |\alpha - a_{n_2}| + |a_{n_2} - \beta| < 2\varepsilon.$$

Siendo ε un racional positivo arbitrario, concluimos que $|\alpha - \beta| < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, de lo cual, por la arquimedianidad de $\mathbb{Q}$ (Lema 3.1.2), deducimos que $|\alpha - \beta| = 0$, y por ende, que $\alpha = \beta$, como queríamos demostrar. □

Es interesante notar una característica de la demostración precedente que, de alguna manera, distingue el "análisis" del "álgebra": a fin de demostrar la igualdad a cero de un número, en este caso el módulo $|\alpha - \beta|$, demostramos que es **menor que cualquier racional positivo**. Es decir, incluso cuando se trata de demostrar una **igualdad**, la demostración procede por "estimaciones".

Propiedades de las sucesiones convergentes

De los Ejercicios 3.1.9 y 3.1.21, por ejemplo, debería resultar claro que establecer la convergencia de una sucesión dada con la definición puede ser una tarea compleja. Sin embargo, a veces podemos reducir el estudio de la convergencia de una sucesión dada al de otras más sencillas, como vamos a ver en el ejemplo a continuación.

Ejemplo 3.1.26. *Sean $(a_n)_{n>4}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ las sucesiones definidas por*

$$a_n := \frac{2n}{n-3} \quad y \quad b_n := \frac{3n^2}{n^2-2}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Admitamos sin demostración que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 2 y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 3 (la verificación de estas afirmaciones queda a cargo del lector). Afirmamos que la sucesión producto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 6.

En efecto, fijemos $\varepsilon > 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \left|\frac{2n}{n-3}\cdot\frac{3n^2}{n^2-2} - 6\right| &= \left|\frac{2n}{n-3}\cdot\frac{3n^2}{n^2-2} - 3\cdot\frac{2n}{n-3} + 3\cdot\frac{2n}{n-3} - 6\right| \\ &\leq \left|\frac{2n}{n-3}\right|\cdot\left|\frac{3n^2}{n^2-2} - 3\right| + 3\left|\frac{2n}{n-3} - 2\right|. \end{aligned}$$

Observamos que, si $n \geq 6$, entonces $n-3 \geq n/2$, lo cual implica $|2n/(n-3)| \leq 4$. Asimismo, de la convergencia de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a 2 y la de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a 3 deducimos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - 2| < \varepsilon$ y $|b_n - 3| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$. En consecuencia, si $n \geq \text{máx}\{6, n_0\}$, entonces

$$\left|\frac{2n}{n-3}\cdot\frac{3n^2}{n^2-2} - 6\right| \leq 4\left|\frac{3n^2}{n^2-2} - 3\right| + 3\left|\frac{2n}{n-3} - 2\right| < 7\varepsilon.$$

Concluimos entonces que $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 6, como habíamos afirmado. Pero lo que queremos destacar es que nuestro análisis de la convergencia de $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se reduce fundamentalmente al de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Más generalmente, el estudio de la convergencia de una sucesión que se obtiene por medio de una operación aritmética con dos sucesiones "más simples" puede reducirse al de estas dos últimas. En lo que sigue vamos a enunciar y demostrar un resultado en este sentido.

Teorema 3.1.27 (Propiedades aritméticas de los límites)**.** *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes a α y β respectivamente. Entonces:*

1. *La sucesión $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha + \beta$.*
2. *La sucesión $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha \cdot \beta$.*

3. *Si* $\alpha \neq 0$ *y* $a_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, la sucesión* $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $1/\alpha$*.*

A fin de demostrar los ítems 2 y 3 del Teorema 3.1.27, necesitamos el siguiente resultado, de interés en sí mismo. Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ se dice **acotada** si existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Lema 3.1.28. *Toda sucesión convergente es acotada.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{Q}$ que converge a $\alpha \in \mathbb{Q}$. Fijamos $\varepsilon = 1$. De acuerdo con la definición de convergencia de sucesiones (Definición 3.1.18), tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \alpha| < 1$ si $n \geq n_0$. En particular, vemos que $\alpha - 1 < a_n < \alpha + 1$ para todo $n \geq n_0$. Sea $M := \text{máx}\{|1+\alpha|, |-1+\alpha|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|\}$. De la definición de M fácilmente concluimos que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Ahora podemos pasar a la demostración del Teorema 3.1.27.

Demostración del ítem 2 del Teorema 3.1.27. Tenemos que demostrar que la diferencia $|a_nb_n - \alpha\beta|$ se aproxima a 0 cuando n crece. Para esto, vamos a expresar esta diferencia en términos de las diferencias $|a_n - \alpha|$ y $|b_n - \beta|$, de las cuales sabemos que se aproximan a 0 cuando n crece. Para esto, empleamos un truco frecuente en demostraciones que involucran el límite de un producto: intercalamos un término de la forma $a_n\beta$ (o $b_n\alpha$) en dicha diferencia (comparar con el Ejemplo 3.1.26). Así, tenemos

$$|a_nb_n - \alpha\beta| = |a_nb_n - a_n\beta + a_n\beta - \alpha\beta| \leq |a_n| \cdot |b_n - \beta| + |\beta| \cdot |a_n - \alpha|.$$

Dado que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, tenemos entonces que es acotada (Lema 3.1.28), es decir, existe una constante $M > 0$ tal que $|a_n| < M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Combinando esta estimación con la desigualdad precedente concluimos que

$$|a_nb_n - \alpha\beta| \leq M \cdot |b_n - \beta| + |\beta| \cdot |a_n - \alpha|.$$

De aquí en más, el argumento es estándar: fijemos $\varepsilon > 0$ y sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ si $n \geq n_1$ y $|b_n - \beta| < \varepsilon$ si $n \geq n_2$. Entonces, si $n \geq n_0 := \text{máx}\{n_1, n_2\}$, tenemos que

$$|a_nb_n - \alpha\beta| \leq M \cdot |b_n - \beta| + |\beta| \cdot |a_n - \alpha| < \varepsilon(M + |\beta|). \tag{3.4}$$

Esto demuestra que la diferencia $|a_nb_n - \alpha\beta|$ puede acotarse por cualquier constante positiva, con tal de elegir n_0 en el argumento precedente de forma conveniente. En efecto, dada una constante $\varepsilon^* > 0$, observamos que si elegimos ε en el argumento precedente en la forma $\varepsilon := \varepsilon^*/(M + |\beta|)$, entonces (3.4) asegura que $|a_nb_n - \alpha\beta| < \varepsilon^*$ para cada $n \geq n_0 := \text{máx}\{n_1, n_2\}$. Esto demuestra que $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha\beta$. □

Demostración del ítem 3 del Teorema 3.1.27. Dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha \neq 0$, eligiendo $\varepsilon := |\alpha|/2$, tenemos que existe n_1 tal que $|a_n - \alpha| < |\alpha|/2$ para $n \geq n_1$. De esto concluimos que $|a_n| \geq |\alpha|/2$ para $n \geq n_1$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ si $n \geq n_2$. Entonces, si $n \geq$

$\max\{n_1, n_2\}$, tenemos:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|a_n\alpha|}|a_n - \alpha| \leq \frac{2}{|\alpha|^2}|a_n - \alpha| < \frac{2\varepsilon}{|\alpha|^2}.$$

Esto demuestra que $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $1/\alpha$. □

Ejercicio 3.1.29. *Demostrar el ítem 1 del Teorema 3.1.27.*

Ejercicio 3.1.30. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_n := \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$. Como $a_n = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1. Por otro lado, como cada sumando de a_n tiende a 0, usando el hecho de que el límite de una suma es la suma de los límites (ítem 1 del Teorema 3.1.27), resulta que ¡$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0! ¿Cómo se explica esto?*

Ejercicio 3.1.31. *Sea $\lambda \neq 0$ y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $(a_n/\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1. ¿Qué se puede decir sobre la convergencia de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?*

Ejercicio 3.1.32. *Probar que si una sucesión de números racionales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces $|a_n|$ converge a $|\alpha|$. ¿Es cierta la recíproca?*

Ejercicio 3.1.33 (Exponenciales vs. polinómicas)**.**

1. *Sea $\lambda > 1$ y sea p un polinomio con coeficientes racionales. Demostrar que la sucesión $\left(p(n)/\lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.* (Sugerencia: usar el Ejercicio 3.1.13.)
2. *Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$, sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ racionales no nulos y sea $f(n) := \gamma_1\lambda_1^n + \cdots + \gamma_r\lambda_r^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que la sucesión $(f(n)/\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 si $\lambda > \lambda_1$, a γ_1 si $\lambda_1 = \lambda$ y tiene límite infinito si $\lambda_1 > \lambda$.*
3. *Con las hipótesis y notaciones de los ítems anteriores, concluir que $(p(n)/f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 si y solo si $\lambda_1 > 1$.*

Ejercicio 3.1.34 (Exponenciales vs. polinómicas bis)**.**

1. *Sea $p \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$. Demostrar que la sucesión $(p(n+1)/p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a* 1.
2. *Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$, sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ racionales no nulos arbitrarios y sea $f(n) := \gamma_1\lambda_1^n + \cdots + \gamma_r\lambda_r^n$. Demostrar que $(f(n+1)/f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a λ_1.*

Otro resultado útil en el estudio de convergencia de sucesiones es la conocida "propiedad sandwich".

Lema 3.1.35 (Propiedad sandwich)**.** *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números racionales tales que:*

- *$a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y*
- *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo valor $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Entonces $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a α, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ si $n \geq n_1$ y $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ si $n \geq n_2$. En consecuencia, si $n \geq \text{máx}\{n_1, n_2\}$, resulta $a_n - \alpha > -\varepsilon$ y $c_n - \alpha < \varepsilon$. Dado que $a_n - \alpha \leq b_n - \alpha \leq c_n - \alpha$, tenemos que $-\varepsilon < b_n - \alpha < \varepsilon$, es decir, $|b_n - \alpha| < \varepsilon$. □

Ejemplo 3.1.36. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de $\mathbb{Q}$ y consideremos la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n := a_n/n$. Afirmamos que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

A fin de demostrar esta afirmación, vamos a aplicar la propiedad sandwich precedente. En efecto, dado que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, tenemos que existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, resulta

$$-\frac{M}{n} \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{M}{n} \tag{3.5}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Si definimos las sucesiones $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $c_n := -M/n$ y $d_n := M/n$, entonces (3.5) muestra que $c_n \leq a_n \leq d_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Asimismo, es fácil ver que tanto $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a 0, por lo que, de acuerdo con la propiedad sandwich (Lema 3.1.35), vemos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

Ejercicio 3.1.37. *Analizar la convergencia de dos sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfacen las siguientes condiciones para cada $n \in \mathbb{N}$:*

$$3 - \frac{5}{4^n} \leq 4 - 3a_n \leq 2 + \frac{n+7}{n}, \qquad 3 \leq 5 - \frac{9}{b_n} \leq \frac{4n+5}{2n-1} + \frac{2^n+1}{2^n}.$$

Ejercicio 3.1.38 (“Cero por acotada converge a cero”). *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números racionales tales que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Demostrar que $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Ejercicio 3.1.39. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{Q}$ contenida en el intervalo $(2,5)$. Analizar la convergencia de la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n := \frac{9^{n+2}}{n(3^{2n+1}+2)}(a_n^2+1)$.*

Por último, mencionamos un resultado “cualitativo” útil en el estudio de los límites de sucesiones conocido como el “Principio de conservación del número”, que afirma que si los términos de una sucesión satisfacen ciertas desigualdades, éstas se “preservan” en el límite. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.1.40 (“Conservación del número”). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{Q}$ que converge a $\alpha \in \mathbb{Q}$, y supongamos que existen $a, b \in \mathbb{Q}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $a \leq a_n \leq b$ para cada $n \geq n_0$. Entonces $a \leq \alpha \leq b$.*

Demostración. Demostramos que $\alpha \leq b$, o equivalentemente, demostramos que si $b < \alpha$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b < a_n$ para cada $n \geq n_0$. Sea $\varepsilon := \alpha - b$. Dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$. Esto implica que $\alpha - a_n < \alpha - b$ para $n \geq n_0$, o, lo que es lo mismo, $b < a_n$ para cada $n \geq n_0$. □

Ejercicio 3.1.41. *¿Es cierto el Lema 3.1.40 si reemplazamos las desigualdades por desigualdades estrictas? Demostrar o exhibir un contraejemplo.*

3.2. ¿Cuándo aproximar?: Funciones continuas

Supongamos que queremos resolver una ecuación $f(x) = 0$, que tiene una única solución, digamos $x = \alpha$. Supongamos además que tenemos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de posibles aproximaciones de α. Como hemos dicho en la sección anterior, a fin de determinar si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ "resuelve" la ecuación $f(x) = 0$, **podemos observar** si la sucesión $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Ahora bien, este análisis podría resultar completamente inútil si la función f presentara un "mal" comportamiento alrededor de la solución $x = \alpha$ de la ecuación, por ejemplo, si f oscilara en torno a $x = \alpha$, dado que en este caso el valor $f(a_n)$ podría ser grande para valores de a_n relativamente cercanos a α.

Por ejemplo, consideremos la ecuación $f(x) = 0$, siendo $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ la función

$$f(x) := \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Observamos que la función f tiene "mal comportamiento" en torno a $x = 0$ (ver la Figura 3.1). Así, si intentáramos resolver de forma aproximada la ecuación $f(x) = 0$, cuya única solución es $x = 0$, podríamos proponer la sucesión de aproximaciones $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$, que efectivamente converge a la solución $x = 0$ que estamos buscando. Sin embargo, la sucesión $(f(1/n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a infinito, por lo que érroneamente podríamos concluir que no estamos aproximando la solución de la ecuación $f(x) = 0$.

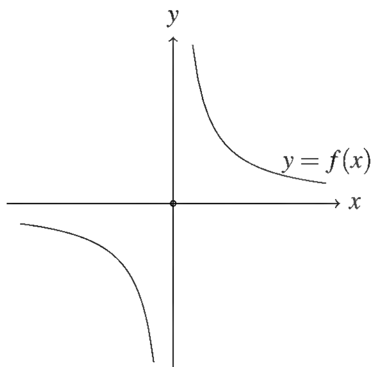


Figura 3.1.: El gráfico de la función f de (3.6).

Para tener herramientas certeras de análisis, necesitamos **restringir** el tipo de funciones f que admitimos en nuestros problemas, de modo de que el valor $f(a_n)$ resulte efectivamente cercano a 0 si a_n está cerca de α.

¿Qué significa esto? Supongamos que tenemos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionales que aproxima una solución $\alpha \in \mathbb{Q}$ de la ecuación $f(x) = 0$ en consideración. Dado que tenemos f (es decir, podemos calcular el valor de $f(x)$ para cualquier valor de x dado) y tenemos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos analizar el comportamiento de los valores sucesivos $f(a_n)$, es decir, el comportamiento asintótico de la **sucesión** $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Lo que esperamos es que la sucesión $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$

converja a $f(\alpha)$.

Tal tipo de funciones corresponden a lo que conocemos como funciones **continuas**, cuya definición formal damos a continuación.

Definición 3.2.1. *Sea f una función definida en un subconjunto A de $\mathbb{Q}$. Diremos que f es* **continua en** $\alpha \in A$ *si, para cada sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A que converge a α, la sucesión $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\alpha)$. A su vez, diremos que f es* **continua** *si es continua en cada elemento $\alpha \in A$.*

Ejemplo 3.2.2. *Sea $A \subset \mathbb{Q}$ un subconjunto no vacío y sea $f : A \to \mathbb{Q}$ la función $f(x) := x^2$. Afirmamos que f es continua. En efecto, sea $\alpha \in \mathbb{Q}$ y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a α. Por las propiedades aritméticas de los límites (Teorema 3.1.27) tenemos que la sucesión $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}} = (a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha^2 = f(\alpha)$, lo que demuestra que f es continua en α. Dado que α es un punto arbitrario de A, concluimos que f es continua.*

Ejemplo 3.2.3. *Sea $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}$ la función $f(x) := 1/x$. Afirmamos que f es continua. En efecto, sea $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a α. Dado que $\alpha \neq 0$, las propiedades aritméticas de los límites (Teorema 3.1.27) garantizan que la sucesión $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}} = (1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $1/\alpha = f(\alpha)$, lo que demuestra que f es continua en α. Dado que α es un punto arbitrario de $\mathbb{Q}_{>0}$, concluimos que f es continua.*

Ejemplo 3.2.4. *Supongamos dadas dos funciones continuas $f : \mathbb{Q}_{<0} \to \mathbb{Q}$ y $g : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}$ tales que $f(0) \neq g(0)$. Si $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es la función definida por*

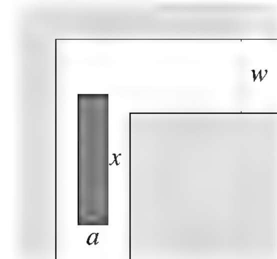
$$h(x) := \begin{cases} f(x) & si\ x \leq 0, \\ g(x) & si\ x > 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

afirmamos que h no es continua en 0. En efecto, consideremos por caso la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$, que converge a 0. Por la continuidad de g tenemos que $\lim_{n\to\infty} h(1/n) = \lim_{n\to\infty} g(1/n) = g(0) \neq f(0) = h(0)$. Esto muestra que h no es continua en 0.

Ejercicio 3.2.5. *Con las hipótesis del ejemplo precedente, demostrar que si $f(0) = g(0)$ entonces la función h definida de acuerdo a (3.7) resulta continua.*

Ejercicio 3.2.6 (Una función discontinua). *Tomamos este ejemplo de [Joh30]. Una mesa con forma rectangular se gira de forma horizontal de un corredor a otro del mismo ancho w, perpendicular al primero. Supongamos que el rectángulo que define la mesa tiene un lado de longitud constante, digamos a, en tanto que denominamos x a la longitud del segundo lado (ver la figura). Dado x, el mínimo valor de w de forma tal que la mesa gire está dado por la siguiente expresión:*

$$w = \begin{cases} 0 & si\ x = 0, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \dfrac{a}{2}\right) & si\ 0 < x \leq a, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{x}{2} + a\right) & si\ x \geq a. \end{cases}$$



Si consideramos a $w : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$ como función de x, demostrar que w es discontinua en $x = 0$, en tanto que es continua en $x = a$.

3.2.1. Propiedades de las funciones continuas

Sean $f : A \subset \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ y $g : A \subset \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dos funciones continuas en $\alpha \in A$. De las propiedades aritméticas de los límites (Teorema 3.1.27) concluimos que $f + g$ es continua en α. En efecto, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de A que converge a α, por la continuidad de f y g concluimos que las sucesiones $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a $f(\alpha)$ y $g(\alpha)$ respectivamente, de lo que concluimos que $((f+g)(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(f+g)(\alpha)$. Con razonamientos de este tipo deducimos el siguiente resultado.

Proposición 3.2.7 (Propiedades aritméticas de las funciones continuas)**.** *Sean $f, g : A \subset \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dos funciones continuas en $\alpha \in A$. Entonces:*

1. *$f + g$ es continua en α,*
2. *$f \cdot g$ es continua en α,*
3. *si $g(\alpha) \neq 0$, entonces f/g es continua en α.*

En particular, las funciones polinomiales son continuas, como enunciamos en el siguiente ejercicio, de modo que la clase de funciones continuas contiene a los ejemplos que estudiamos hasta el momento.

Ejercicio 3.2.8. *Demostrar que toda función polinomial $p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es continua en $\mathbb{Q}$.*

Ejercicio 3.2.9. *Sea $f : A \subset \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ una función racional que posee una representación $f(x) = p(x)/q(x)$, siendo $p(x)$ y $q(x)$ polinomios con coeficientes racionales, de modo tal que $q(x)$ no se anula en ningún punto de A. Demostrar que f es continua.*

Ejercicio 3.2.10. *Sea $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ una función continua. Consideremos las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionales definidas de la siguiente manera:*

$$a_n := \frac{4n^3 + 2^n}{n^3 + 3^n}, \qquad b_n := f(a_n).$$

Demostrar que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada y la sucesión $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a 0.

Otra propiedad que tiene un "buen comportamiento" en relación con la continuidad es la composición de funciones. Más precisamente, si $f : A \subset \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es continua en $\alpha \in A$, $g : B \subset \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es continua en $\beta := f(\alpha)$ y la composición $g \circ f$ está bien definida, entonces resulta continua en α. En efecto, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de A que converge a α, entonces, $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\beta := f(\alpha)$ por la continuidad de f en α. En consecuencia, de la continuidad de g en β concluimos que $\big((g \circ f)(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(g(f(a_n))\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $g(\beta) = (g \circ f)(\alpha)$. En resumen, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.2.11. *Sean $f : A \subset \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ y $g : B \subset \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dos funciones tales que la composición $g \circ f : A \to \mathbb{Q}$ está bien definida. Si f es continua en $\alpha \in A$ y g es continua en $f(\alpha)$, entonces $g \circ f$ es continua en α.*

Tabla 3.2.: Los primeros términos de la sucesión $(d_n)_{n>0}$.

n	d_n	$f(d_n)$
0	1.50000000000	0.250000000
1	-1.25000000000	-0.437500000
2	1.37500000000	-0.109375000
3	-1.43750000000	0.066406250
4	1.40625000000	-0.022460938
5	-1.42187500000	0.021728516
6	1.41406250000	-0.000427246
7	-1.41796875000	0.010635376
8	1.41601562500	0.005100250
9	-1.41503906250	0.002335547
10	1.41455078125	0.000953913

3.3. “Con qué aproximar” revisitado: sucesiones de Cauchy

De la discusión de las Secciones 3.1 y 3.2 hemos concluido que resolver una ecuación $f(x)=0$, siendo f una función **continua**, **corresponde a hallar una sucesión** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Sin embargo, podría ocurrir que la ecuación $f(x)=0$ tuviera más de una solución, y que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ “oscilara” en torno a distintas soluciones, en cuyo caso no tendríamos propiamente **una solución** de nuestro problema. Por ejemplo, en el caso de la ecuación $x^2=2$, consideramos la sucesión $(d_n)_{n>0}$ definida por $d_n := (-1)^n c_n$, donde $(c_n)_{n>0}$ es la sucesión de puntos medios del método de bisección de la Sección 2.1. En la Tabla 3.2 listamos los primeros 11 valores de esta sucesión (junto con los correspondientes valores de d_n^2-2), que representamos gráficamente en la Figura 3.2.

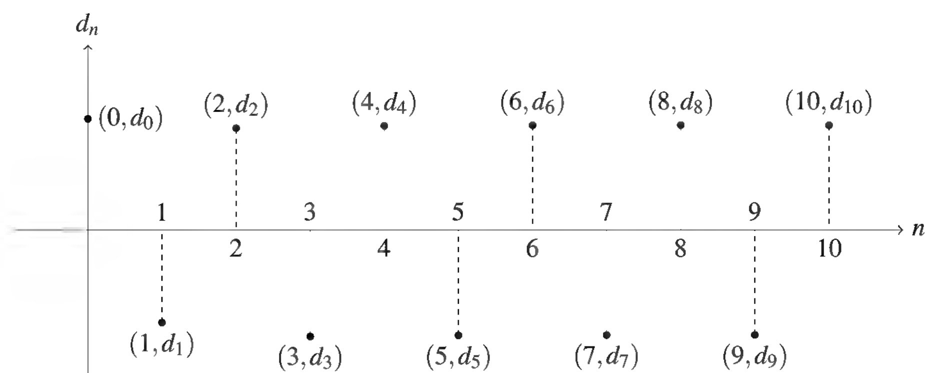


Figura 3.2.: La representación gráfica de los primeros términos de $(d_n)_{n>0}$.

Dado que $d_n^2 = c_n^2$ para cada $n \geq 0$ y $\lim_{n\to\infty}(c_n^2-2)=0$ (Ejercicio 3.1.12), concluimos que

$\lim_{n\to\infty}(d_n^2 - 2) = 0$. Sin embargo, la sucesión $(d_n)_{n>0}$ **no resuelve** la ecuación $x^2 - 2 = 0$, dado que **no produce una solución**, en el sentido de que sus términos **no tienen un comportamiento asintótico definido**, como puede apreciarse por inspección de la Tabla 3.2. Vemos entonces que es necesario **restringir el tipo de sucesiones** que vamos a aceptar como solución a un problema de tipo (1.7), a fin de evitar fenómenos como la aparición de sucesiones oscilantes.

El problema es el siguiente: dado que **no conocemos** ninguna de las (hipotéticas) soluciones α de $f(x) = 0$ que nuestra sucesión de aproximaciones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estaría representando, ¿cómo podemos **determinar** si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a alguna de ellas, siendo que no podemos analizar el comportamiento progresivo de la diferencia $|a_n - \alpha|$?

Nuevamente, los métodos de bisección y de Newton descriptos en las Secciones 2.1 y 2.2 a propósito de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ nos ofrecen una sugerencia al respecto: podemos **comparar** los términos sucesivos de la sucesión de aproximaciones **entre sí**, a fin de decidir si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene algún tipo de "comportamiento progresivo", como esperamos. En efecto, en las Tablas 2.1 y 2.2 se aprecia que los términos sucesivos de la sucesión de aproximaciones del método de bisección y del método de Newton cada vez tienen más dígitos decimales en común. Dicho de otro modo, en ambos casos se aprecia que las diferencias $|a_n - a_m|$ se acercan a 0 a medida que n crece. En consecuencia, los términos de la sucesión se "pegan" progresivamente entre sí: dada una precisión $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para $n, m \geq n_0$, y por lo tanto, podemos garantizar que **todos** los términos de la sucesión van a distar entre sí en menos de ε a partir de n_0 en adelante. Este comportamiento fue observado explícitamente por primera vez por Augustin Cauchy, y por lo tanto, las sucesiones que tienen dicha característica se denominan sucesiones de Cauchy.

Definición 3.3.1. *Una sucesión de números racionales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice* **de Cauchy** *si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para $n, m \geq n_0$.*

Ejemplo 3.3.2. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_1 := 1$ y*

$$a_{n+1} := a_n + \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Afirmamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Para ver esto, de acuerdo con la definición precedente, fijamos $\varepsilon > 0$ y analizamos la diferencia $|a_n - a_m|$. Suponiendo sin pérdida de generalidad $m > n$, podemos reescribir a m en la forma $m := n + k$. Así, se trata entonces de demostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$ y cada $k \in \mathbb{N}$, resulta $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$. En efecto,

$$\begin{aligned} |a_{n+k} - a_n| &= |a_{n+k} - a_{n+k-1} + a_{n+k-1} - \cdots + a_{n+1} - a_n| \\ &= \left|\frac{(-1)^{n+k-1}}{n+k} + \frac{(-1)^{n+k-2}}{n+k-1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \frac{(-1)^{k-1}}{n+k} + \cdots + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

dado que

$$\frac{(-1)^{2j}}{n+2j+1} + \frac{(-1)^{2j-1}}{n+2j} = \frac{1}{n+2j+1} - \frac{1}{n+2j} < 0$$

para todo $j \geq 0$. En consecuencia, si elegimos n_0 tal que $1/(n_0+1) < \varepsilon$, resultará $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$ y cada $k \in \mathbb{N}$. Concluimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

De la argumentación que nos condujo a la Definición 3.3.1 y el Ejemplo 3.3.2 podría pensarse que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la cual la diferencia $|a_{n+1}-a_n|$ tiende a 0 debe ser necesariamente una sucesión de Cauchy. Sin embargo, esto no es necesariamente así, como lo muestra el ejemplo a continuación.

Ejemplo 3.3.3 (Una sucesión que no es de Cauchy). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_1 := 1$ y $a_{n+1} := a_n + 1/(n+1)$. Entonces $|a_{n+1}-a_n| = 1/(n+1)$, que tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Sin embargo,*

$$\begin{aligned} |a_{2n}-a_n| &= |a_{2n}-a_{2n-1}+a_{2n-1}-\cdots+a_{n+1}-a_n| \\ &= |a_{2n}-a_{2n-1}|+|a_{2n-1}-a_{2n-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n| \\ &= \frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

de lo cual se deduce que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es una sucesión de Cauchy.

Ejercicio 3.3.4. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{Q}$ tal que existen $\lambda > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ con $|a_{n+1}-a_n| \leq \lambda/n^2$ para cada $n \geq n_0$.*

1. *Demostrar que $|a_{n+k}-a_n| \leq \lambda/(n-1)$ para cada $n > n_0$ y cada $k \geq 1$.* (Sugerencia: usar la estimación $\frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}$.)
2. *Concluir que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$.*

Ejercicio 3.3.5. *Demostrar que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$, entonces la sucesión $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Hemos introducido el concepto de sucesión de Cauchy a fin de tener un criterio que nos permitiera decidir si el comportamiento asintótico de una sucesión dada es "oscilante". Desde este punto de vista, una familia "poco interesante" de sucesiones de Cauchy es la de las sucesiones convergentes: en cualquier sucesión convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la diferencia $|a_n-a_m|$ se hace progresivamente "chica", dado que todos los términos se acercan al límite α de la sucesión. Éste es el contenido del siguiente resultado.

Lema 3.3.6. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente de $\mathbb{Q}$. Entonces es de Cauchy.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, y sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n-\alpha| < \varepsilon$. Afirmamos que para $n \geq m \geq n_0$, tenemos la estimación $|a_n-a_m| < 2\varepsilon$. En efecto, si $n \geq m \geq n_0$, tenemos que $|a_n-a_m| \leq |a_n-\alpha|+|\alpha-a_m| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$. En consecuencia, deducimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, lo que concluye la demostración. □

Ejercicio 3.3.7 (Toda sucesión de Cauchy es acotada). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$. Demostrar que es acotada.* (Sugerencia: argumentar como en la demostración de que toda sucesión convergente es acotada (Lema 3.1.28).)

Dos ejemplos interesantes de sucesiones de Cauchy son la sucesión $(c_n)_{n>0}$ del método de bisección de la Sección 2.1 y la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton de la Sección 2.2. Esto

es consecuencia de un resultado general: una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la cual la diferencia $|a_{n+1} - a_n|$ entre términos sucesivos decrece **exponencialmente** es necesariamente una sucesión de Cauchy, como demostramos a continuación.

Lema 3.3.8. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números racionales tales que existen racionales $\lambda > 0$ y $0 \le \gamma < 1$ tales que $|a_{n+1} - a_n| < \lambda\gamma^n$. Entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ arbitrario. Tenemos:

$$\begin{aligned} |a_{n+k} - a_n| &= |a_{n+k} - a_{n+k-1} + a_{n+k-1} - a_{n+k-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| \\ &\le |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + |a_{n+k-1} - a_{n+k-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\ &\le \lambda\gamma^{n+k-1} + \lambda\gamma^{n+k-2} + \cdots + \lambda\gamma^n \\ &= \lambda\gamma^n(\gamma^{k-1} + \gamma^{k-2} + \cdots + 1) = \lambda\gamma^n \tfrac{1-\gamma^k}{1-\gamma} \le \gamma^n \tfrac{\lambda}{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Éste es el núcleo de la demostración: hemos probado que la diferencia $|a_{n+k} - a_n|$ se acota, salvo el factor constante $\lambda/(1-\gamma)$, por un término γ^n que **tiende a** 0 cuando n tiende a infinito, **independientemente de** k. Demostrar ahora que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy es una tarea en cierto sentido "rutinaria": dado $\varepsilon > 0$ fijo, como $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a 0 (ya que es una sucesión geométrica con $0 \le \gamma < 1$, ver el Lema 3.1.11), es posible elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma^n < \varepsilon(1-\gamma)/\lambda$. En consecuencia, si $m \ge n \ge n_0$, entonces

$$|a_m - a_n| \le \gamma^n \frac{\lambda}{1-\gamma} < \varepsilon,$$

lo que demuestra que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. □

Del Lema precedente se deduce que las sucesiones $(c_n)_{n>0}$ del método de bisección de la Sección 2.1 y $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton de la Sección 2.2 son de Cauchy, lo que nos asegura que dichas sucesiones efectivamente resuelven la ecuación $x^2 - 2 = 0$ en el sentido que hemos mencionado. Éste es el contenido de los siguientes ejercicios.

Ejercicio 3.3.9. *Sea $(c_n)_{n>0}$ la sucesión de puntos medios del método de bisección de la Sección 2.1. Demostrar que $|c_{n+1} - c_n| \le 2^{-n}$ para cada $n \ge 0$ y concluir que $(c_n)_{n>0}$ es una sucesión de Cauchy.*

Ejercicio 3.3.10. *Sea $(a_n)_{n>0}$ la sucesión del método de Newton de la Sección 2.2.*

1. *Demostrar que $|a_{n+1} - a_n| \le \frac{1}{4}|a_n^2 - 2|$ para cada $n \ge 0$.*
2. *Concluir que $|a_{n+1} - a_n| \le 4^{-n}$ para cada $n \ge 0$.*
3. *Demostrar que $(a_n)_{n>0}$ es una sucesión de Cauchy.*

El Lema 3.3.8 nos provee una condición que asegura que una sucesión dada es de Cauchy: el "decrecimiento exponencial" del valor absoluto de la diferencia entre términos sucesivos. Se trata de una condición que aparece con cierta frecuencia, por lo que vamos a utilizar reiteradamente dicho resultado. De todas maneras, es importante destacar que se trata **condición suficiente, pero no necesaria**: la sucesión del Ejemplo 3.3.2 es de Cauchy, pero no satisface dicha condición.

4. Aproximando la solución de $x^2 = 2$: desarrollos decimales

De nuestra discusión del Capítulo 3 podemos concluir que un “buen” proceso de aproximación de una solución de una ecuación $f(x) = 0$ (o un problema de minimización $\min_{x\in A} f(x)$, o un problema de equilibrio $f(x) = x$), definido por una **función continua** f, consiste de una **sucesión de Cauchy** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de “aproximaciones”, de modo tal que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$ (o $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \min_{x\in A} f(x)$, o $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$). Dicha sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es lo que denominamos una **solución** del problema en consideración. Nuestra intención en este capítulo es comenzar a discutir en qué sentido la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ “resuelve” dicho problema. Para esto, habiendo desarrollado algunos rudimentos del lenguaje de las sucesiones, de las sucesiones de Cauchy y de las funciones continuas, vamos a reinterpretar los métodos que desarrollamos en las Secciones 2.1, 2.2 y 2.3 a efectos de resolver nuestros problemas modelo: la ecuación $x^2 = 2$, la minimización de la función $x^3 - 6x$ y el problema de equilibrio $1/x + x/2 = x$.

4.1. La solución de $x^2 = 2$ con sucesiones de Cauchy

Comenzamos con el método de bisección de la Sección 2.1. Sea $f(x) := x^2 - 2$. Recordamos que el método de bisección consiste en una sucesión de intervalos $(I_n)_{n>0} := ([a_n, b_n])_{n>0}$ de extremos racionales con las siguientes propiedades:

1. $b_n - a_n = 2^{-n}$;
2. $f(a_n) < 0 < f(b_n)$;
3. si $c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$, entonces $(c_n)_{n>0}$ es una sucesión de Cauchy tal que $(c_n^2 - 2)_{n>0}$ converge a 0.

Del ítem 3 concluimos que la sucesión de puntos medios **resuelve el problema** (2.1). ¿En qué sentido lo resuelve? Como hemos dicho en la Sección 3.3, y podemos apreciar analizando la Tabla 2.1, los términos de la sucesión $(c_n)_{n>0}$ tienen progresivamente **cada vez más dígitos decimales en común**, lo que tomamos como indicación de que $(c_n)_{n>0}$ efectivamente “converge”. **Supongamos** que $(c_n)_{n>0}$ converge a $\alpha \in \mathbb{Q}$ y estudiemos qué propiedades tiene este hipotético límite α.

Una primera observación es que la convergencia de $(c_n)_{n>0}$ inmediatamente implica la de las sucesiones $(a_n)_{n>0}$ y $(b_n)_{n>0}$, al mismo valor α.

Lema 4.1.1. *Si $(c_n)_{n>0}$ converge a $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces las sucesiones $(a_n)_{n>0}$ y $(b_n)_{n\geq 0}$ convergen a α.*

Demostración. Demostramos que $(a_n)_{n>0}$ converge a α. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $(c_n)_{n>0}$ converge a α, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ para $n \geq n_1$. Por otro lado, teniendo en cuenta que $|c_n - a_n| \leq |b_n - a_n| = 2^{-n}$, concluimos que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|c_n - a_n| \leq \varepsilon$ para $n \geq n_2$. Sea $n_0 := \text{máx}\{n_1, n_2\}$. Entonces, si $n \geq n_0$, tenemos que

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - c_n| + |c_n - \alpha| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Esto demuestra que $(a_n)_{n>0}$ converge a α. La demostración de la convergencia de $(b_n)_{n>0}$ a α es similar. □

Demostramos ahora que este hipotético límite $\alpha \in \mathbb{Q}$ resuelve nuestro problema.

Lema 4.1.2. $f(\alpha) = 0$.

Demostración. Dado que las sucesiones $(a_n)_{n>0}$ y $(b_n)_{n>0}$ convergen a α, de la continuidad de $f(x) := x^2 - 2$ (Ejercicio 3.2.8) resulta que $(f(a_n))_{n>0}$ y $(f(b_n))_{n>0}$ convergen a $f(\alpha)$. Ahora bien, dado que $f(a_n) < 0$ y $f(b_n) > 0$ para cada $n \geq 0$, por el "principio de conservación del número" (Lema 3.1.40) resulta que $f(\alpha)$ satisface a la vez las condiciones $f(\alpha) \leq 0$ y $f(\alpha) \geq 0$. En conclusión, $f(\alpha) = 0$. □

En definitiva, α resultaría la solución del problema (2.1) que estamos buscando. Sin embargo, la sucesión $(c_n)_{n>0}$ **no puede converger** en $\mathbb{Q}$, dado que la ecuación $x^2 = 2$ **no tiene soluciones racionales**. Esto vuelve a poner en consideración la cuestión sobre el sentido de dicha "convergencia". Dado que hemos mencionado el comportamiento de los dígitos decimales de los términos c_n como una indicación de convergencia, vamos a estudiar la cuestión con más detalle.

4.2. Desarrollos decimales

A fin de estudiar los desarrollos decimales de los términos de la sucesión $(c_n)_{n>0}$, necesitamos entender en primer lugar qué es un desarrollo decimal. Para esto, vamos a demostrar que cada elemento $\alpha \in \mathbb{Q}$ posee **desarrollos decimales finitos** de cualquier orden, que **aproximan bien** a dicho elemento α, en un sentido que vamos a discutir a continuación.

4.2.1. La primera aproximación: parte entera

Dado un número racional positivo α, sabemos que éste se puede representar por un desarrollo decimal infinito $r_0.r_1r_2\ldots$, donde $r_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $r_i \in \{0, \ldots, 9\}$ para cada $i \geq 1$ (cabe destacar que el entero r_0 puede tener una representación decimal consistente en más de un dígito, que vamos a representar por un único símbolo r_0 aquí). Comenzamos por caracterizar de manera unívoca la "parte entera" r_0 de α.

Consideremos, para fijar ideas, el número $15/7$, cuyo desarrollo decimal es $2{,}142857\ldots$ En este caso, $r_0 = 2$ es la denominada **parte entera** de $15/7$. ¿Qué es lo que caracteriza a la parte entera de un racional positivo α dado? Que la parte "restante" $\alpha - r_0$ del desarrollo decimal de α es de la forma $0.r_1r_2r_3\ldots$, es decir, $0 \leq \alpha - r_0 < 1$, como se verifica inmediatamente en el caso de $15/7$, donde tenemos $\alpha - r_0 = 15/7 - 2 = 1/7$. Ésta es una "buena" caracterización de la parte

entera r_0, dado que no hace referencia al restante desarrollo decimal $0.r_1r_2r_3\ldots$, sino solo a α y r_0.

Así obtenemos el siguiente resultado, que asegura la existencia y unicidad de la parte entera de cada número racional positivo.

Lema 4.2.1. *Sea α un racional positivo arbitrario. Entonces existe un único entero $r_0 := \lfloor \alpha \rfloor \geq 0$ con la siguiente propiedad:*

$$r_0 \leq \alpha < r_0 + 1.$$

Demostración. Sean $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $b \in \mathbb{N}$ tales que $\alpha = a/b$. El Teorema de la división en $\mathbb{Z}$ (Teorema 0.2.5) asegura que existen únicos $q, r \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que $a = b \cdot q + r$ y $0 \leq r < b$. En particular, deducimos que

$$\alpha = \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \quad \text{y} \quad 0 \leq \frac{r}{b} < 1.$$

Afirmamos que $r_0 := q$ satisface las condiciones del enunciado. En efecto, de la condición $0 \leq r/b < 1$ deducimos que

$$q \leq q + \frac{r}{b} = \alpha < q + 1,$$

lo que demuestra la existencia de la parte entera. Por otro lado, en lo que respecta a la unicidad, cabe observar que si $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ satisface las condiciones $s \leq \alpha < s+1$, entonces $q \leq \alpha < s+1$, y por lo tanto, $q \leq s$. Análogamente, dado que $s \leq \alpha < q+1$, vemos que $s \leq q$. En consecuencia, debe ser $q = s$, lo que completa la demostración de la unicidad. □

4.2.2. El caso general: la parte "decimal"

Considerando nuevamente el número racional $\alpha = 15/7$, si notamos su desarrollo decimal por $r_0.r_1r_2r_3\ldots$, sabemos que $r_0 = \lfloor 15/7 \rfloor = 2$. La cuestión ahora es cómo caracterizar los restantes dígitos del desarrollo decimal. Para esto, observamos que $\alpha - r_0 = 15/7 - 2 = 1/7$, cuyo desarrollo decimal es $0{,}142857\ldots$. En particular, el desarrollo decimal de $10(\alpha - r_0)$ es $1{,}42857\ldots$, por lo que la parte entera $\lfloor 10(\alpha - r_0) \rfloor = 1$ de $10(\alpha - r_0)$ nos provee el siguiente dígito decimal r_1 de α. Observamos que

$$r_0.r_1 := r_0 + \frac{r_1}{10} = 2{,}1 \leq \alpha,$$

y $\alpha - r_0.r_1$ tiene el desarrollo decimal $0{,}042857\ldots$, es decir,

$$0 \leq \alpha - \left(r_0 + \frac{r_1}{10}\right) < \frac{1}{10}. \tag{4.1}$$

En particular, la condición (4.1) determina unívocamente r_0 y r_1.

Prosiguiendo de esta manera, vemos que $100(\alpha - r_0.r_1)$ tiene el desarrollo decimal $4{,}2857\ldots$, de donde concluimos que $r_2 = 4 = \lfloor 100(\alpha - r_0.r_1) \rfloor$. Los demás dígitos se obtienen del mismo modo. Sistematizando este proceso deducimos la existencia y unicidad de los desarrollos decimales finitos.

Teorema 4.2.2 (Existencia y unicidad de los desarrollos decimales finitos). *Sea α un racional positivo arbitrario. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen únicos enteros positivos r_0 y $r_1, \ldots, r_n \in$*

$\{0,1,\ldots,9\}$ *tales que:*

$$0 \leq \alpha - \left(r_0 + \frac{r_1}{10} + \cdots + \frac{r_n}{10^n}\right) < \frac{1}{10^n}. \tag{4.2}$$

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{Q}$ positivo. De la caracterización de la parte entera (Lema 4.2.1) tenemos que $r_0 := \lfloor \alpha \rfloor$ es un entero positivo tal que $r_0 \leq \alpha < r_0 + 1$, es decir, $0 \leq \alpha - r_0 < 1$. Esto muestra el enunciado en el caso $n = 0$.

Supongamos ahora inductivamente que el enunciado está demostrado para un cierto entero $n \geq 0$ y veamos que vale para $n+1$. Dado que el enunciado es válido para n, tenemos que existen únicos $r_0 \geq 0$ y $r_1, \ldots, r_n \in \{0,1,\ldots,9\}$ tales que

$$0 \leq \alpha - \left(r_0 + \frac{r_1}{10} + \cdots + \frac{r_n}{10^n}\right) < \frac{1}{10^n}.$$

Por lo tanto,

$$0 \leq \alpha_{n+1} := 10^{n+1}\left(\alpha - \left(r_0 + \frac{r_1}{10} + \cdots + \frac{r_n}{10^n}\right)\right) < 10. \tag{4.3}$$

Sea $r_{n+1} := \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor$. De (4.3) concluimos que $0 \leq r_{n+1} < 10$. A su vez, tenemos que $0 \leq \alpha_{n+1} - r_{n+1} < 1$, y por ende,

$$0 \leq \frac{1}{10^{n+1}}(\alpha_{n+1} - r_{n+1}) = \alpha - \left(r_0 + \frac{r_1}{10} + \cdots + \frac{r_{n+1}}{10^{n+1}}\right) < \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Esto concluye la demostración de existencia.

Demostramos ahora la unicidad de los elementos $r_0, r_1, \ldots r_n$ de (4.2), por inducción en n, la cantidad de dígitos decimales.

En el caso $n = 0$ la unicidad se deduce de la unicidad de la parte entera (Lema 4.2.1): si r_0 es un entero positivo que satisface la condición $0 \leq \alpha - r_0 < 1$, entonces $r_0 \leq \alpha < r_0 + 1$, lo cual implica que $r_0 = \lfloor \alpha \rfloor$. En particular, r_0 está unívocamente determinado por α.

Supongamos ahora el enunciado cierto para desarrollos decimales de n dígitos, y demostremos que es cierto para desarrollos de $n+1$ dígitos. Si tenemos enteros positivos r_0 y $r_1, \ldots, r_{n+1} \in \{0,\ldots,9\}$ tales que

$$0 \leq \alpha - \left(r_0 + \frac{r_1}{10} + \cdots + \frac{r_{n+1}}{10^{n+1}}\right) < \frac{1}{10^{n+1}},$$

entonces

$$0 \leq \frac{r_{n+1}}{10^{n+1}} \leq \alpha - \left(r_0 + \frac{r_1}{10} + \cdots + \frac{r_n}{10^n}\right) < \frac{1 + r_{n+1}}{10^{n+1}} \leq \frac{1}{10^n}.$$

De esta expresión concluimos que $r_0 + r_1/10 + \cdots + r_n/10^n$ es un desarrollo decimal de n dígitos para α, y en consecuencia, por la hipótesis inductiva deducimos que $r_0, \ldots, r_n$ están unívocamente determinados por α. Finalmente, si definimos, como más arriba, $\alpha_{n+1} := 10^{n+1}(\alpha - (r_0 + r_1/10 + \cdots + r_n/10^n))$ (que, de acuerdo a lo que hemos supuesto, está unívocamente determinado por α), entonces $r_{n+1} = \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor$ y por lo tanto también r_{n+1} está unívocamente determinado por α. □

En particular, cuando n tiende a infinito, vemos que la sucesión de aproximaciones decimales finitas $(r_0 + r_1/10 + \cdots + r_n/10^n)_{n>0}$ converge a α, lo que representamos en la forma (puramente simbólica por el momento) $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} r_n/10^n$. Así, **a cada racional α le corresponde un único**

desarrollo decimal infinito $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} r_n/10^n$ que satisface las condiciones del Teorema 4.2.2. A esta escritura, como habitualmente, vamos a expresarla en la forma: $\alpha = r_0.r_1r_2\ldots$. Por otro lado, si $\alpha \in \mathbb{Q}$ es negativo, representamos a α por el desarrollo decimal infinito $-r_0.r_1r_2\ldots$, donde $r_0.r_1r_2\ldots$ es el desarrollo decimal infinito de $-\alpha$. Resumimos estas consideraciones en el siguiente enunciado.

Corolario 4.2.3 (Existencia y unicidad de los desarrollos decimales infinitos)**.** *Cada elemento α de $\mathbb{Q}$ admite un único desarrollo decimal infinito $\alpha = \pm r_0.r_1r_2\ldots$ que satisface las condiciones del Teorema 4.2.2.*

Cabe destacar que existen casos en los que un racional admite más de un desarrollo decimal infinito: por ejemplo, $1 \in \mathbb{Q}$ admite los desarrollos $1 = 1{,}000\ldots$ y $1 = 0{,}999\ldots$. Veamos por qué admite este último desarrollo:

$$0.\underbrace{999\ldots9}_{m \text{ veces}} = \sum_{n=1}^{m} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1-(1/10)^m}{1-1/10} = 1-(1/10)^m.$$

Dado que el término a la derecha converge a 1, concluimos que $1 = 0{,}999\ldots$. Sin embargo, esto no contradice la unicidad del enunciado del Corolario 4.2.3, dado que el desarrollo $1 = 0{,}999\ldots$ no satisface las condiciones del enunciado: el desarrollo $0{,}999\ldots$ comienza con $r_0 := 0$, y por lo tanto, la condición $0 \leq 1 - r_0 < 1$ no se verifica.

En vistas del Corolario 4.2.3, vamos a identificar cada número racional α con el único desarrollo decimal de α que satisface las condiciones del Teorema 4.2.2. Tales desarrollos decimales infinitos serán denominados de ahora en adelante **desarrollos decimales admisibles**.

Ejercicio 4.2.4. *El objetivo del presente ejercicio es demostrar que el* **desarrollo decimal de cualquier número racional es periódico**.

Sea $\alpha = a/b$ con $a, b \in \mathbb{N}$ y $a = br_0 + s_0$ la división entera de a por b con resto. De acuerdo con el Lema 4.2.1, tenemos que $r_0 = \lfloor a/b \rfloor$. Definimos dos sucesiones $(r_k)_{k>0}$ y $(s_k)_{k>0}$ de $\mathbb{Z}_{>0}$ de la siguiente manera: comenzando con r_0 y s_0 como están determinados más arriba, definimos r_{k+1} y s_{k+1} para cada $k \geq 0$ como el cociente y resto de la división de $10s_k$ por b, esto es, r_{k+1} y s_{k+1} son los únicos enteros que satisfacen las condiciones $10s_k = br_{k+1} + s_{k+1}$ y $0 \leq s_{k+1} < b$.

1. *Demostrar que $0 \leq r_{k+1} \leq 10s_k/b$ para cada $k \geq 0$. Concluir que $r_k \in \{0, \ldots, 9\}$ para cada $k \geq 1$.*

2. *Demostrar que $r_0.r_1\ldots r_N$ es el desarrollo de N dígitos de a/b para cada $N \geq 0$.*

3. *Observar que si $s_{m_0} = s_{m_0+n_0}$ para ciertos $m_0 \geq 0$ y $n_0 > 0$, entonces $r_m = r_{m+n_0}$ para cada $m \geq m_0$. Deducir que el desarrollo decimal de cualquier número racional es periódico.*

Ejercicio 4.2.5 (El orden en $\mathbb{Q}$ vía desarrollos decimales)**.** *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tales que $\alpha < \beta$.*

1. *Demostrar que los desarrollos decimales infinitos de α y β son distintos.*

2. *Más precisamente, si $r_0, r_1\ldots$ y $s_0, s_1\ldots$ son los desarrollos decimales infinitos de α y β, y n_0 es el menor índice para el cual $r_{n_0} \neq s_{n_0}$, entonces $r_{n_0} < s_{n_0}$.*

Una caracterización de los desarrollos decimales admisibles

Hemos visto que cada número racional α admite un único desarrollo decimal admisible "racional" (Corolario 4.2.3). El objetivo de la presente sección es observar que el desarrollo decimal admisible de un número racional no termina en "infinitos 9", y recíprocamente, un desarrollo decimal que termina en "infinitos 9" es necesariamente un desarrollo decimal "no admisible" de un número racional.

Ejercicio 4.2.6. *Sea $r_0.r_1r_2\ldots$ un desarrollo decimal que converge a $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$.*

1. *Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r_n = 9$ para cada $n > n_0$. Demostrar que*
$$\frac{9}{10} + \cdots + \frac{9}{10^m} \leq 10^{n_0}(\alpha - r_0.r_1\ldots r_{n_0})$$
para cada $m \in \mathbb{N}$.

2. *Deducir que $10^{n_0}(\alpha - r_0.r_1\ldots r_{n_0}) \geq 1$, y por lo tanto, $r_0.r_1\ldots r_n\ldots$ no es un desarrollo decimal admisible de α.*

Ejercicio 4.2.7. *Sea $r_0.r_1r_2\ldots$ un desarrollo decimal tal que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $r_n = 9$ para cada $n > n_0$.*

1. *Demostrar que la sucesión $(r_0.r_1\ldots r_N)_{N>0}$ converge a $\alpha := r_0.r_1\ldots r_{n_0} + 1/10^{n_0}$.*

2. *Concluir que $r_0.r_1r_2\ldots$ no es un desarrollo decimal admisible de α.*

De los Ejercicios 4.2.6 y 4.2.7 precedentes deducimos la siguiente caracterización de los desarrollos decimales "racionales": **un desarrollo decimal infinito $r_0.r_1r_2\ldots$ es el desarrollo decimal admisible de un número racional si y solo si la sucesión $(r_0.r_1\ldots r_N)_{N>0}$ converge en $\mathbb{Q}$ y no existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r_n = 9$ para cada $n > n_0$**. Con esta caracterización en mente, vamos a denominar "admisible" a un desarrollo decimal arbitrario (no necesariamente racional) si no termina en infinitos 9. Observamos que, de acuerdo con el Ejercicio 4.2.7, **un desarrollo decimal infinito que no converge en $\mathbb{Q}$ es necesariamente admisible**.

4.3. La "convergencia" de las sucesiones de Cauchy

Habiendo entendido qué es un desarrollo decimal (finito o infinito), podemos discutir en qué sentido ocurre la "convergencia" de la sucesión de Cauchy $(c_n)_{n>0}$ del método de bisección aplicado a la ecuación $x^2 = 2$, habida cuenta de que ésta **no converge en $\mathbb{Q}$**. A tal efecto, vamos a demostrar que toda sucesión de Cauchy de números racionales **define un único desarrollo decimal infinito admisible**, lo que explica el comportamiento de la Tabla 2.1.

Para esto, comenzamos con un resultado que nos va a permitir caracterizar el comportamiento de las sucesiones de Cauchy que no convergen en $\mathbb{Q}$. Este resultado afirma que, dado un racional α, los términos de cada sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ que no converge en $\mathbb{Q}$ quedan, o bien **todos** a la izquierda o bien **todos** a la derecha de α, desde algún término en adelante.

Lema 4.3.1. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ y $\alpha \in \mathbb{Q}$ tales que existen infinitos $n,m \in \mathbb{N}$ con $a_n \le \alpha \le a_m$. Entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para $n,m \ge n_0$. Afirmamos que $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ para cada $n \ge n_0$. En efecto, dado $n \ge n_0$ y suponiendo sin pérdida de generalidad que $a_n \le \alpha$, tenemos que existe $m \ge n_0$ tal que $a_m \ge \alpha$ (de otro modo, solo finitos términos a_m satisfarían la condición $a_m \ge \alpha$). Por lo tanto,

$$|a_n - \alpha| \le |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Esto prueba nuestra afirmación y completa la demostración. □

4.3.1. El fenómeno de estabilización de dígitos

Ahora podemos pasar al análisis del desarrollo decimal de los sucesivos términos de cada sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ que no converge. Comenzamos estudiando el comportamiento de la sucesión de puntos medios $(c_n)_{n>0}$ que hemos obtenido aplicando el método de bisección a la ecuación $x^2 = 2$. Recordamos los primeros diez términos de esta sucesión, que extraemos de la Tabla 2.1 y listamos en la Tabla 4.1. Una rápida inspección a la Tabla 4.1 muestra que los dígitos del desarrollo decimal de c_n se van “estabilizando” progresivamente, en el sentido de que todos los términos c_n tienen parte entera igual a 1, en tanto que a partir del término c_3 todos los desarrollos comienzan con 1,4, y a partir del término c_6 todos los desarrollos comienzan con 1,41. Es fácil ver que el desarrollo decimal de **todos** los términos c_n para $n \ge 6$ comienza con 1,41: en efecto, dado $f(c_6) < 0$, el método de bisección elige a c_6 como el extremo izquierdo del siguiente intervalo I_7. Dado que los sucesivos intervalos satisfacen la condición $I_7 \supset I_8 \supset I_9 \supset \cdots$, concluimos que $c_6 = a_7 \le a_8 \le a_9 \le \cdots$. Análogamente, dado que $f(c_7) > 0$, entonces elegimos el extremo derecho b_8 de I_8 en la forma $b_8 := c_7$, y por lo tanto tenemos $c_7 = b_8 \ge b_9 \ge b_{10} \ge \cdots$. En particular, para $n \ge 8$ resulta $a_7 \le a_n \le c_n \le b_n \le b_8$, y, dado que $a_7 = c_6$ y $b_8 = c_7$ tienen el mismo desarrollo de 2 dígitos 1,41, del Ejercicio 4.2.5 deducimos que el desarrollo de c_n es de la forma $1,41\ldots$ para $n \ge 8$.

Siguiendo con este ejemplo, ¿cómo podemos estudiar el desarrollo de 2 dígitos de los términos de la sucesión $(c_n)_{n>0}$? Una forma simple es multiplicar la sucesión por 10^2, a fin de traducir la cuestión a un problema de “partes enteras”. Si hacemos esto con los términos c_n que aparecen en la Tabla 4.1, obtenemos $10^2c_0 = 150$, $10^2c_1 = 125$, $10^2c_2 = 137{,}5$, $10^2c_3 = 143{,}75$, $10^2c_4 = 140{,}625$, $10^2c_5 = 142{,}1875$, $10^2c_6 = 141{,}40625$, etc.

El Ejercicio 3.3.9 asegura que la sucesión $(c_n)_{n>0}$ es de Cauchy. De hecho, dado que $c_n, c_{n+k} \in [a_n, b_n]$ para cada $n,k \ge 0$, deducimos que $|c_{n+k} - c_n| \le 2^{-n}$ para cada $n,k \ge 0$. En particular, tenemos que

$$|10^2c_{n+k} - 10^2c_n| \le 10^2 \cdot 2^{-n} < \frac{1}{2}$$

si $n \ge 8$. En consecuencia, $10^2c_n \in (10^2c_8 - 1/2, 10^2c_8 + 1/2)$ si $n \ge 8$, y por lo tanto,

$$141 = \lfloor 10^2c_8 - 1/2 \rfloor \le 10^2c_8 - 1/2 < 10^2c_n < 10^2c_8 + 1/2 < \lfloor 10^2c_8 + 1/2 \rfloor + 1 = 143$$

Tabla 4.1.: Los desarrollos de 2 dígitos de la sucesión del método de bisección.

n	c_n	$10^2 c_n$
0	1.50000000000	150.000000000
1	1.25000000000	125.000000000
2	1.37500000000	137.500000000
3	1.43750000000	143.750000000
4	1.40625000000	140.625000000
5	1.42187500000	142.187500000
6	1.41406250000	141.406250000
7	1.41796875000	141.796875000
8	1.41601562500	141.601562500
9	1.41503906250	141.503906250
10	1.41455078125	141.455078125

si $n \geq 8$. A fin de asegurar que el desarrollo de dos dígitos de c_n es siempre el mismo para n suficientemente grande, bastará con ver que $10^2 c_n \in (141, 142)$, en cuyo caso será $c_n = 1{,}41\ldots$, o bien $10^2 c_n \in (142, 143)$, en cuyo caso será $c_n = 1{,}42\ldots$, para n suficientemente grande. Ahora bien, dado que $10^2 c_n \in (141, 143)$ para $n \geq 8$, si existieran infinitos $n, m \in \mathbb{N}$ tales

$$10^2 c_n < 142 < 10^2 c_m,$$

entonces los términos $10^2 c_n$ se "acumularían" en torno a 142, de lo que concluiríamos por el Lema 4.3.1 que $\lim_{n\to\infty} 10^2 c_n = 142$, o equivalentemente, $\lim_{n\to\infty} c_n = 1{,}42$, cosa que sabemos que no puede suceder. Así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $10^2 c_n \in (141, 142)$ para $n \geq n_0$, o bien existe existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $10^2 c_n \in (142, 143)$ para $n \geq n_0$. Generalizando esta argumentación obtenemos una demostración de la existencia de un fenómeno de estabilización de dígitos en una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ arbitraria, que enunciamos y demostramos a continuación.

Proposición 4.3.2 ("Estabilización de dígitos"). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}_{>0}$ que no converge a un racional de la forma $r/10^k$. Entonces, para cada $N \geq 0$ existen $m(N) \geq 0$ y $R(N) \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que, para cada $n \geq m(N)$, tenemos:*

$$R(N) < 10^N a_n < R(N) + 1. \tag{4.4}$$

Demostración. Fijemos $N \in \mathbb{N}$. Dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, $(10^N a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es, y por lo tanto existe $m_0 = m_0(N) \in \mathbb{N}$ tal que $|10^N a_n - 10^N a_m| < 1/2$ si $n, m \geq m_0$. Por lo tanto, todos los términos de la sucesión $(10^N a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $n \geq m_0$ están en un intervalo de longitud 1 en torno a $10^N a_{m_0}$, y por ende, contenidos en algún intervalo con extremos enteros de longitud 2, esto es,

$$10^N a_n \in (10^N a_{m_0} - 1/2, 10^N a_{m_0} + 1/2) \subset (R_1 - 1, R_1 + 1)$$

para $n \geq n_0$, siendo $R_1 := 1 + \lfloor 10^N a_{m_0} - 1/2 \rfloor$.

Afirmamos que, para n suficientemente grande, todos los términos de la sucesión $(10^N a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ están contenidos en el intervalo $(R_1 - 1, R_1)$ o en el intervalo $(R_1, R_1 + 1)$, lo cual completaría la demostración. A fin de probar esto, es necesario ver que los términos $10^N a_n$ no se "acumulan" en torno a R_1. Dado que por hipótesis $(10^N a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a R_1 (ya que si no, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergería a $R_1/10^N$), de acuerdo al Lema 4.3.1 tenemos que existe $m(N) \geq m_0(N)$ tal que, o bien $10^N a_n < R_1$ para cada $n \geq m(N)$, o bien $10^N a_n > R_1$ para cada $n \geq m(N)$. Supongamos que ocurre la primera de estas dos posibilidades, es decir, que $10^N a_n < R_1$ para cada $n \geq m(N)$. Entonces tenemos $R_1 - 1 < 10^N a_n < R_1$ para cada $n \geq m(N)$, en cuyo caso, definiendo $R(N) := R_1 - 1$ concluimos la demostración. Por otro lado, si se satisface la segunda alternativa, es decir, $10^N a_n > R_1$ para cada $n \geq m(N)$, entonces $R_1 + 1 > 10^N a_n > R_1$ para cada $n \geq m(N)$ y por lo tanto, definiendo $R(N) := R_1$ concluimos la demostración. □

Cabe realizar algunos comentarios sobre el enunciado precedente. En primer lugar, observamos que, a partir de nuestro resultado sobre la estabilización de dígitos de sucesiones de Cauchy de $\mathbb{Q}_{>0}$, inmediatamente deducimos un enunciado análogo para sucesiones de Cauchy de $\mathbb{Q}_{<0}$. En efecto, dada una sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}_{<0}$, por la proposición sobre la estabilización de dígitos tenemos que los dígitos decimales de la sucesión $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se estabilizan, y en consecuencia, los de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también lo hacen. Asimismo, dada una sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ que no converge en $\mathbb{Q}$, de acuerdo con el Lema 4.3.1 tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, o bien $a_n > 0$ para cada $n \geq n_0$, o bien $a_n < 0$ para cada $n \geq n_0$. Por lo tanto, a efectos de considerar el **comportamiento asintótico** del desarrollo decimal de la sucesión en consideración, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathbb{Q}_{>0}$ o de $\mathbb{Q}_{<0}$.

Por otro lado, la condición sobre la "no convergencia" de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un racional de la forma $r/10^k$ es fundamental para la conclusión del lema, dado que, en caso contrario, podría ocurrir que el desarrollo decimal de los términos de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $r/10^k$ podrían "oscilar" entre dos posibles desarrollos decimales infinitos de $r/10^k$ (aunque solo uno de éstos sea admisible). En los siguientes ejercicios pedimos estudiar este fenómeno en dos casos particulares.

Ejercicio 4.3.3. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_n := 1 - (1/10)^n$.*

1. *Estudiar la convergencia de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *Analizar la construcción del resultado sobre la estabilización de dígitos (Proposición 4.3.2) para este caso. ¿Qué se puede concluir?*

Ejercicio 4.3.4. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_n := 1 - (-1/10)^n$.*

1. *Estudiar la convergencia de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *Analizar la construcción del resultado sobre la estabilización de dígitos (Proposición 4.3.2) para este caso.*

Ejercicio 4.3.5. *Exhibir $\alpha \in \mathbb{Q}$ con la siguiente propiedad: cada sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ que converge a α satisface el resultado sobre la estabilización de dígitos (Proposición 4.3.2).*

4.3.2. Cada sucesión de Cauchy define un desarrollo decimal

El fenómeno de la "estabilización de dígitos" precedente es el punto esencial que explica que una sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ que no converge en $\mathbb{Q}$ de todas maneras define un desarrollo decimal infinito (admisible). Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.6 (Convergencia de las sucesiones de Cauchy). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ que no converge a un racional de la forma $r/10^k$. Entonces, si $m(N)$ y $R(N)$ son los definidos en el resultado sobre la estabilización de dígitos (Proposición 4.3.2), para cada $n \geq m(N)$ el desarrollo decimal finito $\pm r_0.r_1r_2\dots r_N$ de N dígitos de a_n es el de $\pm R(N)/10^N$, es decir, $\pm R(N)/10^N = \pm r_0.r_1r_2\dots r_N$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $N \geq 0$ fijo. Por la definición de $m(N)$ tenemos que $0 \leq 10^N a_n - R(N) < 1$ para cada $n \geq m(N)$. Por lo tanto, si expresamos a $R(N)$ en la forma $R(N) = r_0\,10^N + r_1\,10^{N-1} + \dots + r_N$, con $r_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $r_1,\dots,r_N \in \{0,\dots,9\}$, tenemos que

$$0 \leq a_n - \frac{R(N)}{10^N} = a_n - \left(r_0 + \frac{r_1}{10} + \dots + \frac{r_N}{10^N}\right) < \frac{1}{10^N}.$$

Esto demuestra que $R(N)/10^N = r_0.r_1r_2\dots r_N$ es el desarrollo decimal de N dígitos de a_n para cada $n \geq m(N)$. □

Observamos que, si $m(N)$ se elige como el menor número natural a partir del cual resulta válida (4.4), entonces la sucesión $(m(N))_{N\in\mathbb{N}}$ resulta creciente, dado que, si para cada $n \geq n(N+1)$ los términos a_n tienen el mismo desarrollo de $N+1$ dígitos, entonces también tienen el mismo desarrollo de N dígitos, y por lo tanto debe ser $m(N) \leq m(N+1)$. Por lo tanto, en lo que sigue vamos a suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión $(m(N))_{N\in\mathbb{N}}$ es creciente.

El Teorema 4.3.6 asegura que el desarrollo decimal de N dígitos $\pm r_0^{(N)}.r_1^{(N)}r_2^{(N)}\dots r_N^{(N)}$ de cada término a_n de una sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que no converge a un racional de la forma $r/10^k$ es el mismo para cada $n \geq m(N)$. Por ende, de la unicidad de los desarrollos decimales finitos (Teorema 4.2.2) vemos que el desarrollo decimal de $N+1$ dígitos $\pm r_0^{(N+1)}.r_1^{(N+1)}r_2^{(N+1)}\dots r_{N+1}^{(N+1)}$ de cada a_n con $n \geq n(N+1)$ coincide en sus primeros N dígitos con $\pm r_0^{(N)}.r_1^{(N)}r_2^{(N)}\dots r_N^{(N)}$, es decir, $r_j^{(N)} = r_j^{(N+1)}$ para $j = 0,\dots,N$. Concluimos de esto que la sucesión de desarrollos decimales $(\pm r_0^{(N)}.r_1^{(N)}r_2^{(N)}\dots r_N^{(N)})_{N>0}$ define un único desarrollo decimal infinito $\pm r_0.r_1r_2\dots$, que necesariamente debe admisible, dado que en caso contrario la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergería a un racional de la forma $r/10^k$. En consecuencia, tenemos que cada sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$, convergente a un racional de la forma $r/10^k$ o no, determina un único desarrollo decimal admisible.

Definición 4.3.7 (Desarrollo decimal asociado a una sucesión de Cauchy). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$. Entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ determina un único desarrollo decimal infinito admisible $\pm r_0.r_1r_2\dots$ de la siguiente manera:*

- *si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un racional $r/10^k$, entonces definimos $\pm r_0.r_1r_2\dots$ como el desarrollo decimal admisible de $r/10^k$,*

- *si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a ningún racional de la forma $r/10^k$, y para cada $N \geq 0$ definimos $R(N)$ como en el resultado sobre la estabilización de dígitos (Proposición 4.3.2), entonces $\pm r_0.r_1 \ldots r_N$ es el desarrollo decimal (finito) de $R(N)/10^N$.*

Éste es el sentido que le vamos a dar a la "convergencia" de una sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ que no converge en $\mathbb{Q}$: determina un desarrollo decimal infinito, es decir, los desarrollos decimales de los sucesivos términos a_n "convergen" a un desarrollo decimal infinito (admisible).

Ejercicio 4.3.8 (Desarrollos decimales de sucesiones convergentes)**.** *El objetivo de este ejercicio es demostrar de forma directa el Teorema 4.3.6 en el caso de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un racional $\alpha > 0$ que no es de la forma $r/10^k$. Sea $(r_0.r_1 \ldots r_N)_{N>0}$ la sucesión de desarrollos decimales finitos de α.*

1. *Sea $N \geq 0$ fijo. Demostrar que $r_0.r_1 \ldots r_N < \alpha < r_0.r_1 \ldots r_N + 1/10^N$.*
2. *Demostrar que existe $n_0 = n_0(N)$ tal que $r_0.r_1 \ldots r_N < a_n < r_0.r_1 \ldots r_N + 1/10^N$ para cada $n \geq n_0$.*
3. *Concluir que $r_0.r_1 \ldots r_N$ es el desarrollo decimal de N dígitos de a_n para todo $n \geq n_0$.*

4.4. La solución de $x^2 = 2$ mediante el método de bisección

Retomamos ahora la pregunta de partida: ¿en qué sentido la sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$ de puntos medios del método de bisección resuelve la ecuación $x^2 = 2$? Teniendo en cuenta lo que hemos discutido, podemos preguntarnos sobre el desarrollo decimal de los términos de la sucesión $(c_n^2 - 2)_{n>0}$, en relación con el desarrollo decimal de los términos de la sucesión $(c_n)_{n\geq 0}$. Tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.4.1. *Si $(r_0.r_1 \ldots r_N)_{N>0}$ es la sucesión de desarrollos decimales finitos determinado por la sucesión $(c_n)_{n>0}$, entonces $((r_0.r_1 \ldots r_N)^2)_{N>0}$ converge a 2.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. De la definición del desarrollo decimal definido por cada sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ (Definición 4.3.7) concluimos que, para cada $N \geq 0$, existe $m(N)$ tal que $r_0.r_1 \ldots r_N$ es el desarrollo decimal de N dígitos de c_n para todo $n \geq m(N)$. Sea $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/10^{N_0} < \varepsilon$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|c_n^2 - 2| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Entonces, si $N \geq N_0$ y $n \geq \text{máx}\{n_0, m(N_0)\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|(r_0.r_1 \ldots r_N)^2 - 2| &\leq |(r_0.r_1 \ldots r_N)^2 - c_n^2| + |c_n^2 - 2| \\
&\leq |(r_0.r_1 \ldots r_N) - c_n| \cdot |(r_0.r_1 \ldots r_N) + c_n| + \varepsilon \\
&< 10^{\ N} |(r_0.r_1 \ldots r_N) + c_n| + \varepsilon \\
&\leq 4 \cdot 10^{\ N} + \varepsilon \leq 4 \cdot 10^{\ N_0} + \varepsilon \leq 4\varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Hemos demostrado entonces que la sucesión $(c_n)_{n>0}$ determina **un único desarrollo decimal infinito** con la propiedad de que **el cuadrado de la correspondiente sucesión de desarrollos decimales finitos converge a 2**. Éste es el sentido que vamos a darle a la "convergencia" de dicha sucesión a una solución de $x^2 = 2$.

Ejercicio 4.4.2. *Sea* $(u_n)_{n>0}$ *una sucesión de Cauchy de* $\mathbb{Q}_{>0}$ *tal que* $\lim_{n \to \infty}(u_n^2 - 2) = 0$ *y sea* $r_0.r_1r_2\ldots$ *el desarrollo decimal infinito que determina* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Probar que* $\lim\limits_{N\to\infty}\big((r_0.r_1\ldots r_N)^2 - 2\big) = 0$.

Ejercicio 4.4.3. *Sea* $(t_n)_{n>0}$ *la sucesión del Ejercicio 2.1.4 y sea* $s_0.s_1s_2\ldots$ *el desarrollo decimal infinito que determina* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Demostrar que* $\lim_{N\to\infty} g(s_0.s_1\ldots s_N) = 0$.

5. El cuerpo ordenado de los números reales

En nuestras discusiones precedentes hemos obtenido una nueva noción de **solución** de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ (o del problema de minimización $\text{mín}_{x>0} x^3 - 6x$, o del problema de equilibrio $x/2 + 1/x = x$). Más precisamente, hemos convenido en decir que la ecuación $x^2 - 2 = 0$ **está resuelta si obtenemos una sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ tal que $(a_n^2 - 2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a** 0. ¿Por qué decimos que la ecuación $f(x) = 0$ está **resuelta** por medio de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Porque sabemos que cada sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ define un único **desarrollo decimal infinito admisible** (Teorema 4.3.6 y Definición 4.3.7). Siendo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ y $\alpha := r_0, r_1 r_2 \ldots$ el desarrollo decimal infinito que ésta define, de la condición $\text{lím}_{n\to\infty}(a_n^2 - 2) = 0$ concluimos fácilmente que $((r_0.r_1 r_2 \ldots r_N)^2 - 2)_{N>0}$ converge a 0, lo que notamos en la forma $(r_0.r_1 r_2 \ldots)^2 - 2 = 0$. Ahora bien, admitiendo **desarrollos decimales irracionales** (es decir, desarrollos decimales infinitos admisibles que no corresponden al de ningún número racional) como "soluciones" de ecuaciones, **hemos arribado a una noción más general de número**, la de número real, que definimos a continuación.

Definición 5.0.4 (Definición preliminar del conjunto de los números reales). *Denominamos al conjunto de los desarrollos decimales infinitos admisibles el* **conjunto de los números reales** *y lo representamos como habitualmente por el símbolo* $\mathbb{R}$.

Surgen inmediatamente varias cuestiones en torno a esta definición. En primer lugar, dado que hemos dicho que los desarrollos decimales infinitos admisibles constituyen un nuevo tipo de "números", cabe preguntarse cómo operamos con ellos, es decir, **cómo se definen las operaciones aritméticas** entre dos desarrollos decimales infinitos. Asimismo, hemos visto que las cuestiones de aproximación se basan en una noción de **distancia**. En $\mathbb{Q}$, la distancia entre dos racionales se define como el valor absoluto de su diferencia, lo cual requiere saber cuáles racionales son positivos o, equivalentemente, cómo se ordenan los racionales. En este sentido, nos preguntamos si podemos extender esta noción de **orden** al **conjunto de los desarrollos decimales infinitos** admisibles, y cómo esta extensión se comporta en presencia de operaciones aritméticas. Precisar estas cuestiones es el objetivo central del presente capítulo.

5.1. La definición "conjuntista" de $\mathbb{R}$

Comenzamos por la propia definición del conjunto de los números reales. Si bien hemos dicho que $\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los desarrollos decimales infinitos **admisibles**, esta "definición" tiene al menos dos inconvenientes importantes:

• no es claro que "necesitemos" **todos** los desarrollos decimales infinitos admisibles;

• tampoco es evidente que todos los desarrollos decimales infinitos admisibles representen números reales **distintos** (es decir, que no tengamos situaciones del tipo $1,000\ldots = 0,999\ldots$).

A fin de atacar la primera cuestión, recordamos que los números reales aparecen como desarrollos decimales infinitos admisibles que determinan las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{Q}$. En tal sentido, tenemos el siguiente resultado.

Lema 5.1.1 (Necesidad de todos los desarrollos decimales admisibles). *Dado un desarrollo decimal infinito admisible, existe una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ que lo determina.*

Demostración. Sea $\pm r_0, r_1 r_2 \ldots$ un desarrollo decimal infinito admisible y escribamos $R_N := \pm r_0.r_1 \ldots r_N$ para cada $N \geq 0$. Recordamos que $(R_N)_{N>0}$ es una sucesión de Cauchy, dado que posee la propiedad de decrecimiento exponencial (Lema 3.3.8). Afirmamos que esta sucesión determina a $\pm r_0, r_1 r_2 \ldots$.

En efecto, supongamos en primer lugar que $\pm r_0, r_1 r_2 \ldots$ es el desarrollo decimal admisible de un número racional α de la forma $r/10^k$, que, sin pérdida de generalidad, vamos a suponer positivo. Entonces $(R_N)_{N>0}$ converge a α, dado que

$$|\alpha - R_N| < \frac{1}{10^N}$$

para cada $N \geq 0$. Por lo tanto, de acuerdo con la definición del desarrollo decimal que determina cada sucesión de Cauchy (Definición 4.3.7), la sucesión $(R_N)_{N>0}$ determina el (único) desarrollo decimal admisible de α, es decir, $r_0, r_1 r_2 \ldots$.

Sea ahora $r_0, r_1 r_2 \ldots$ un desarrollo decimal infinito admisible (positivo) que no corresponde al de ningún racional de la forma $r/10^k$ y sea $N \geq 0$. Afirmamos que, para cada $n \geq N$, el desarrollo decimal de N dígitos de R_n es precisamente R_N. En efecto,

$$\begin{aligned} 10^N \cdot R_N = 10^N \sum_{j=0}^{N} \frac{r_j}{10^j} &\leq 10^N \sum_{j=0}^{N} \frac{r_j}{10^j} + 10^N \sum_{j=N+1}^{n} \frac{r_j}{10^j} \\ &= 10^N \cdot R_n \leq 10^N \sum_{j=0}^{N} \frac{r_j}{10^j} + 10^N \sum_{j=N+1}^{n} \frac{9}{10^j} < 10^N \cdot R_N + 1 \end{aligned}$$

para cada $n \geq N$. Por la construcción de la proposición sobre la estabilización de dígitos (Proposición 4.3.2) concluimos que R_n tiene a R_N como desarrollo de N dígitos para $n \geq N$. Esto muestra que $(R_n)_{n>0}$ determina el desarrollo decimal $r_0, r_1 r_2 \ldots$. □

5.1.1. Identificando desarrollos decimales infinitos

En lo que hace a la segunda cuestión, necesitamos un criterio que nos permita decidir cuándo dos desarrollos decimales infinitos representan el mismo número real. Dado que queremos **definir** a cada número real a partir de un desarrollo decimal infinito, necesitamos que dicho criterio **no haga referencia al elemento representado**. Una idea simple en tal sentido es que **dos desarrollos decimales infinitos admisibles representan el mismo número real si su resta es igual a 0**, como vemos en el siguiente resultado.

Proposición 5.1.2 (Identificación de desarrollos decimales infinitos admisibles)**.** *Sean* $\pm r_0.r_1r_2\ldots$ *y* $\pm s_0.s_1s_2\ldots$ *dos desarrollos decimales admisibles infinitos. Entonces la sucesión* $(\pm r_0.r_1r_2\ldots r_N - \pm s_0.s_1s_2\ldots s_N)_{N\geq 0}$ *converge a 0 si y solo si ambos desarrollos tienen el mismo signo y* $r_j = s_j$ *para cada* $j \geq 0$.

Demostración. Observamos que si $\pm r_0.r_1r_2\ldots$ y $\pm s_0.s_1s_2\ldots$ tienen distinto signo, entonces la sucesión $(\pm r_0.r_1r_2\ldots r_n - \pm s_0.s_1s_2\ldots s_n)_{n\geq 0}$ es monótona, y por lo tanto converge a 0 si y solo si $r_j = s_j = 0$ para todo $j \geq 0$. En consecuencia, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\pm r_0.r_1r_2\ldots$ y $\pm s_0.s_1s_2\ldots$ tienen el mismo signo, que vamos a suponer positivo.

Sean $R_N := r_0.r_1\ldots r_N$ y $S_N := s_0.s_1\ldots s_N$ para cada $N \geq 0$, y supongamos que existe $j_0 \geq 0$ (mínimo) tal que $r_{j_0} \neq s_{j_0}$. Pongamos por caso $r_{j_0} > s_{j_0}$. Dado que $s_0.s_1s_2\ldots$ es un desarrollo decimal admisible, existe $k_0 > j_0$ tal que $s_{k_0} \leq 8$. Sea $n \geq k_0$. Entonces $r_{j_0} - s_{j_0} \geq 1$, $r_{k_0} - s_{k_0} \geq -8$, y en consecuencia,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} \frac{r_j - s_j}{10^j} = \sum_{j=j_0}^{n} \frac{r_j - s_j}{10^j} &\geq \frac{1}{10^{j_0}} - \sum_{j=j_0+1}^{n} \frac{9}{10^j} + \frac{1}{10^{k_0}} \\ &= \frac{1}{10^{j_0}} - \frac{9}{10^{j_0+1}} \sum_{j=0}^{n-j_0-1} \frac{1}{10^j} + \frac{1}{10^{k_0}} \geq \frac{1}{10^{k_0}}.\end{aligned}$$

Deducimos entonces que la sucesión $(R_N - S_N)_{N\geq 0}$ no converge a 0. Recíprocamente, si $r_j = s_j$ para cada $j \geq 0$ entonces evidentemente $(R_N - S_N)_{N\geq 0}$ converge a 0. □

Ejercicio 5.1.3. *Sean* $r_0.r_1r_2\ldots$ *y* $s_0.s_1s_2\ldots$ *dos desarrollos decimales (positivos) tales que existe* $j_0 \geq 0$ *que satisface las siguientes condiciones:*

1. $r_j - s_j = 0$ *para* $j = 0,\ldots,j_0 - 1$,
2. $r_{j_0} - s_{j_0} = 1$,
3. $s_j - r_j = 9$ *para cada* $j > j_0$.

Demostrar que $(r_0.r_1r_2\ldots r_N - s_0.s_1s_2\ldots s_N)_{N\geq 0}$ *converge a 0.*

Ejercicio 5.1.4. *Más generalmente, si* $r_0.r_1r_2\ldots$ *y* $s_0.s_1s_2\ldots$ *son dos desarrollos decimales infinitos distintos (admisibles o no), demostrar que la sucesión* $(r_0.r_1r_2\ldots r_N - s_0.s_1s_2\ldots s_N)_{N\geq 0}$ *converge a 0 si y solo si existe* $j_0 \geq 0$ *que satisface las condiciones 1, 2 y 3 del ejercicio anterior.*

A partir de este criterio de identificación de los desarrollos decimales admisibles vemos que la situación $1 = 1{,}000\ldots = 0{,}999\ldots$ que analizamos en la sección sobre los desarrollos decimales en $\mathbb{Q}$ (Sección 4.2) no es un caso aislado, sino más bien la situación general: **dos desarrollos decimales infinitos**, digamos $r_0.r_1r_2\ldots$ y $s_0.s_1s_2\ldots$, **definen el mismo elemento, es decir, su “diferencia” es 0, si y solo si uno de ellos es “finito”**, es decir, es de la forma $r_0.r_1r_2\ldots r_{j_0}000\ldots$, **y el otro es de la forma** $r_0.r_1r_2\ldots(r_{j_0}-1)999\ldots$. En particular, **dos desarrollos decimales infinitos admisibles distintos representan números reales distintos**, en el sentido de que su “diferencia”, representada por el límite de la sucesión $(r_0.r_1r_2\ldots r_N - s_0.s_1s_2\ldots s_N)_{N\geq 0}$, no es igual a 0.

Habiendo entonces caracterizado cuando dos desarrollos decimales infinitos "representan el mismo número" a partir de los propios desarrollos decimales, podemos definir el conjunto de los desarrollos decimales que nos interesa.

Definición 5.1.5 (El conjunto de los números reales)**.** *Definimos el conjunto de los* **números reales** $\mathbb{R}$ *como el conjunto de los desarrollos decimales infinitos* $\pm r_0.r_1r_2\dots$ *que no terminan en infinitos 9, es decir, que no son de la forma* $\pm r_0.r_1r_2\dots r_{j_0}999\dots$.

De todas maneras, si bien hemos definido $\mathbb{R}$ como **conjunto**, no hemos determinado de qué manera se realizan operaciones aritméticas con los números reales, ni cómo se los ordenan. Precisar estas cuestiones es el objetivo de las próximas secciones.

5.2. Las operaciones aritméticas en $\mathbb{R}$

Una pregunta básica que ya nos formulamos es cómo se "opera" con los desarrollos decimales infinitos, es decir, dado que son "números", nos preguntamos cómo se suman, restan, multiplican y dividen. Una idea "natural", que proviene tanto de la experiencia "escolar" como de la forma en que funcionan las calculadoras y computadoras, es la de operar con los desarrollos decimales finitos. Ahora bien, es necesario determinar si operar con los desarrollos decimales finitos produce algún "resultado", es decir, un desarrollo decimal infinito admisible que podamos considerar el resultado de nuestra operación aritmética. A tal efecto, tenemos el siguiente resultado, que asegura que el resultado de realizar una operación aritmética con los desarrollos decimales finitos de dos números reales dados es una sucesión de Cauchy, y por lo tanto, define un desarrollo decimal infinito admisible.

Lema 5.2.1. *Sean* $\pm r_0, r_1r_2\dots$ *y* $\pm s_0, s_1s_2\dots$ *dos desarrollos decimales admisibles y sean* $R_N := \pm r_0.r_1\dots r_N$ *y* $S_N := \pm s_0.s_1\dots s_N$ *para cada* $N \geq 0$. *Entonces*

1. *las sucesiones* $(R_N \pm S_N)_{N>0}$ *son de Cauchy,*
2. *la sucesión* $(R_N \cdot S_N)_{N>0}$ *es de Cauchy,*
3. *si* $s_0, s_1s_2\cdots \neq 0$, *la sucesión* $(R_N/S_N)_{N>0}$ *es de Cauchy.*

Demostración. Comenzamos con el ítem 1. Dado $N \geq 0$, tenemos que

$$|R_{N+1} \pm S_{N+1} - (R_N \pm S_N)| = |r_{N+1} \pm s_{N+1}| 10^{-(N+1)} \leq 2 \cdot 10^{-N}.$$

Por lo tanto, dado que una sucesión con decrecimiento exponencial es de Cauchy (Lema 3.3.8), concluimos en particular que la sucesión $(R_N \pm S_N)_{N>0}$ es de Cauchy.

En lo que hace al ítem 2, nuevamente demostramos que la sucesión $(R_N \cdot S_N)_{N>0}$ en consideración posee la propiedad del "decrecimiento exponencial". Más precisamente,

$$\begin{aligned}
|R_{N+1} \cdot S_{N+1} - R_N \cdot S_N| &\leq |R_{N+1} \cdot S_{N+1} - R_{N+1} \cdot S_N| + |R_{N+1} \cdot S_N - R_N \cdot S_N| \\
&= |R_{N+1} \cdot s_{N+1} 10^{-(N+1)}| + |r_{N+1} 10^{-(N+1)} \cdot S_N| \\
&\leq (r_0+1) \cdot 10^{-N} + 10^{-N} \cdot (s_0+1) \leq (r_0+s_0+2) 10^{-N},
\end{aligned}$$

lo que demuestra que las diferencias entre términos sucesivos de $(R_N \cdot S_N)_{N>0}$ decrecen exponencialmente. Así, el Lema 3.3.8 asegura que $(R_N \cdot S_N)_{N>0}$ es de Cauchy.

Supongamos por último que $s_0, s_1 s_2 \cdots \neq 0$, y consideremos el ítem 3. A fin de demostrar que $(R_N/S_N)_{N\geq 0}$ es de Cauchy, por el ítem 2 vemos que basta demostrar que las sucesiones $(R_N)_{N>0}$ y $(1/S_N)_{N>0}$ son de Cauchy.

Dado que la diferencia $|R_{N+1} - R_N| = r_{N+1} 10^{\ (N+1)} \leq 10^{\ N}$ decrece exponencialmente, del Lema 3.3.8 concluimos que la sucesión $(R_N)_{N>0}$ es de Cauchy. Por otro lado, sea $n_0 \geq 0$ el menor índice tal que $s_{n_0} \neq 0$. Entonces, si $N \geq n_0$, tenemos que

$$\left|\frac{1}{S_{N+1}} - \frac{1}{S_N}\right| = \left|\frac{S_N - S_{N+1}}{S_{N+1} \cdot S_N}\right| \leq \frac{|S_N - S_{N+1}|}{|s_{n_0}|10^{\ n_0} \cdot |s_{n_0}|10^{\ n_0}} \leq \frac{|s_{N+1}|10^{\ (N+1)}}{\left(|s_{n_0}|10^{\ n_0}\right)^2},$$

lo que demuestra que $(1/S_N)_{N>0}$ posee la propiedad de decrecimiento exponencial, y por lo tanto es una sucesión de Cauchy. □

Discutimos brevemente el enunciado del punto 3 del Lema 5.2.1. Supongamos sin pérdida de generalidad que los desarrollos decimales infinitos admisibles en consideración son positivos, y denotemos por $R_N := r_0.r_1 \ldots r_N$ y $S_N := s_0.s_1 \ldots s_N$ a los correspondientes desarrollos de N dígitos para cada $N \geq 0$. Observamos que los términos R_N/S_N no están necesariamente bien definidos, ya que algunos términos de la sucesión $(S_N)_{N>0}$ podrían anularse. De todas maneras, dado que la sucesión $(S_N)_{N>0}$ es creciente, y existe $N_0 \geq 0$ tal que $s_{N_0} > 0$ (y por lo tanto $S_{N_0} > 0$), vemos que $S_N > 0$ para cada $N \geq N_0$, de lo que concluimos que el cociente R_N/S_N está bien definido para $N \geq N_0$. En lo que respecta al número real representado por la sucesión $(R_N/S_N)_{N>0}$, nos interesa el **comportamiento asintótico** de la sucesión, es decir, el desarrollo decimal de los sucesivos términos $(R_N/S_N)_{N>0}$ para N **suficientemente grande**. Por lo tanto, este desarrollo decimal no cambia si solo consideramos los términos R_N/S_N para $N \geq N_0$.

De esta manera, podemos definir las operaciones aritméticas sobre los desarrollos decimales infinitos admisibles, de acuerdo a nuestras intuiciones, a partir de los desarrollos decimales finitos.

Definición 5.2.2 (Operaciones aritméticas en $\mathbb{R}$). *Sean dados dos desarrollos decimales admisibles $\alpha := \pm r_0, r_1 r_2 \ldots$ y $\beta := \pm s_0, s_1 s_2 \ldots$. Siendo $R_N := \pm r_0.r_1 \ldots r_N$ y $S_N := \pm s_0.s_1 \ldots s_N$ para cada $N \geq 0$, definimos:*

- *$\alpha \pm \beta$ como el desarrollo decimal que define la sucesión de Cauchy $(R_N \pm S_N)_{N>0}$,*
- *$\alpha \cdot \beta$ como el desarrollo decimal que define la sucesión de Cauchy $(R_N \cdot S_N)_{N>0}$,*
- *α/β como el desarrollo decimal que define la sucesión de Cauchy $(R_N/S_N)_{N>0}$ (siempre que $\beta \neq 0$).*

Ejemplo 5.2.3. *Supongamos que queremos sumar los números reales $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$ y $e = 2{,}718281828\ldots$. Suponiendo que "tenemos" las sucesiones infinitas de desarrollos de N dígitos $(R_N)_{N>0}$ y $(S_N)_{N\geq 0}$ de $\sqrt{2}$ y e respectivamente, consideramos la sucesión de Cauchy $(T_N)_{N>0} := (R_N + S_N)_{N>0}$. Tenemos que*

$$T_0 = 3,\ T_1 = 4{,}1,\ T_2 = 4{,}12,\ T_3 = 4{,}132,\ T_4 = 4{,}1324,\ T_5 = 4{,}13249, \ldots$$

lo cual nos permite ir "viendo" progresivamente los dígitos de $\sqrt{2}+e$. Es interesante observar que, dado que $r_4+s_4=2+2=4<9$, entonces T_4 nos provee el desarrollo de 3 dígitos de $\sqrt{2}+e$. En efecto, afirmamos que

$$T_3=4{,}132\leq\sqrt{2}+e<T_3+10^{-3}=4{,}133.$$

Para ver esto, observamos que, por la definición de T_3,

$$\begin{aligned} T_3=R_3+S_3\leq\sqrt{2}+e &< R_4+10^{-4}+S_4+10^{-4} \\ &= R_3+r_4\cdot 10^{-4}+S_3+s_4\cdot 10^{-4}+2\cdot 10^{-4} \\ &= T_3+(r_4+s_4+2)\cdot 10^{-4}\leq T_3+10^{-3}, \end{aligned}$$

lo que demuestra que $T_3=4{,}132$ es el desarrollo de 3 dígitos de $\sqrt{2}+e$.

Ejercicio 5.2.4. *El propósito del presente ejercicio es generalizar la observación del ejemplo precedente. Sean $\alpha:=r_0.r_1r_2\ldots$ y $\beta:=s_0.s_1s_2\ldots$ dos números reales positivos y sean $R_N:=r_0.r_1\ldots r_N$ y $S_N:=s_0.s_1\ldots s_N$ para cada $N\geq 0$. Supongamos que $r_{N_0}+s_{N_0}<9$ para cierto $N_0\in\mathbb{N}$.*

1. *Sea T_{N-1} el desarrollo de $N-1$ dígitos de R_N+S_N. Demostrar que $T_{N-1}\leq\alpha+\beta$.*

2. *Demostrar que $\alpha+\beta<T_{N_0-1}+10^{-(N_0-1)}$. Concluir que T_{N_0-1} es el desarrollo de N_0-1 dígitos de $\alpha+\beta$.*

5.2.1. Sucesiones de Cauchy equivalentes

Las operaciones aritméticas satisfacen las "leyes" asociativas, conmutativas y distributivas habituales. Sin embargo, constatar que esto es así requiere en algunos casos de cierto cuidado. Por ejemplo, consideremos la propiedad asociativa de la suma, es decir, el hecho de que $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$ para números reales arbitrarios α, β y γ. Supongamos que α, β y γ son positivos y denotemos por $\alpha:=r_0.r_1r_2\ldots$, $\beta:=s_0.s_1s_2\ldots$ y $\gamma:=t_0.t_1t_2\ldots$ a los correspondientes desarrollos decimales. De acuerdo con nuestra definición de la suma de dos números reales, a efectos de determinar la suma $\alpha+(\beta+\gamma)$ es necesario determinar el desarrollo decimal infinito admisible $u_0.u_1u_2\ldots$ de $\beta+\gamma$, para obtener $\alpha+(\beta+\gamma)$ como el número real determinado por la sucesión de Cauchy $(r_0.r_1\ldots r_N+u_0.u_1\ldots u_N)_{N>0}$. Así, la suma $\alpha+(\beta+\gamma)$ no se obtiene directamente como el número real que determina la sucesión $\big(r_0.r_1\ldots r_N+(s_0.s_1\ldots s_N+t_0.t_1\ldots t_N)\big)_{N>0}$, esto es, realizando la suma correspondiente con los desarrollos decimales finitos de α, β y γ. En consecuencia, no es tan simple relacionar el número real $\alpha+(\beta+\gamma)$ con $(\alpha+\beta)+\gamma$.

Para solucionar este tipo de inconvenientes, vamos a obtener una caracterización "más operativa" de la relación que existe entre cada sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ y el desarrollo decimal admisible que ésta define.

Lema 5.2.5. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ y sea $\pm r_0.r_1r_2\ldots$ el desarrollo decimal admisible que ésta define. Entonces $(a_n-(\pm r_0.r_1\ldots r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Demostración. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un racional de la forma $r/10^k$, entonces el resultado es consecuencia directa de las propiedades aritméticas de los límites (Teorema 3.1.27), dado que en tal caso $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\pm r_0.r_1\ldots r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo límite.

Supongamos entonces que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a ningún racional de la forma $r/10^k$. Más aún, sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/10^N < \varepsilon$. De acuerdo con la proposición sobre la estabilización de dígitos (Proposición 4.3.2), existe $M(N) \in \mathbb{N}$ tal que a_n tiene a $R_N := r_0.r_1\ldots r_N$ como desarrollo de N dígitos para cada $n \geq M(N)$. En otras palabras, tenemos que $0 \leq a_n - R_N < 1/10^N$ para cada $n \geq M(N)$. Por lo tanto, si $n \geq \text{máx}\{M(N),N\}$, resulta

$$|a_n - R_n| = |a_n - R_N + R_N - R_n| \leq |a_n - R_N| + |R_N - R_n| \leq \frac{2}{10^N} < 2\varepsilon.$$

Esto demuestra que la sucesión $(a_n - R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. □

La situación que se nos plantea en relación con la cuestión de determinar, por ejemplo, si es cierta la identidad $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$ es que tenemos dos sucesiones de Cauchy y queremos determinar si ambas definen el mismo desarrollo decimal infinito admisible. En tal sentido, cabe preguntarse si la condición $\text{lím}_{n\to\infty}(a_n - \pm r_0.r_1\ldots r_n) = 0$ caracteriza las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy de $\mathbb{Q}$ que definen el desarrollo decimal $\pm r_0.r_1r_2\ldots$ Al respecto, vamos a demostrar un resultado general, que en particular implica la afirmación recíproca del Lema 5.2.5: dos sucesiones de Cauchy de $\mathbb{Q}$ cuya diferencia tiende a 0 definen el mismo desarrollo decimal admisible. Esto nos permite identificar de forma más "operativa" a las sucesiones de Cauchy que definen el mismo desarrollo decimal admisible.

Proposición 5.2.6. *Dos sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy de $\mathbb{Q}$ definen el mismo desarrollo decimal admisible si y solo si $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Demostración. Consideramos en primer lugar el caso en que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un racional α de la forma $r/10^k$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un tal racional α y que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definen el mismo desarrollo decimal. Entonces $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α, y por las propiedades aritméticas de los límites (Teorema 3.1.27) tenemos que $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Recíprocamente, si $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α, nuevamente por las propiedades aritméticas de los límites concluimos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α, lo que implica que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definen el mismo desarrollo decimal. Asimismo, argumentamos de forma similar en el caso en que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un racional de la forma $r/10^k$.

Podemos entonces suponer que ni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ni $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a un racional de la forma $r/10^k$. Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ determinan el mismo desarrollo decimal de $\mathbb{R}$, digamos $\pm r_0.r_1r_2\ldots$. El Lema 5.2.5 asegura que las sucesiones $(a_n - \pm r_0.r_1r_2\ldots r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n - \pm r_0.r_1r_2\ldots r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a 0. Así, por las propiedades aritméticas de los límites (Teorema 3.1.27) tenemos que $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

Recíprocamente, supongamos que $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 y sean $\pm r_0.r_1r_2\ldots$ y $\pm s_0.s_1s_2\ldots$ los desarrollos decimales de $\mathbb{R}$ que determinan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente. Sean $R_n := \pm r_0.r_1\ldots r_n$ y $S_n := \pm s_0.s_1\ldots s_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 5.2.5 tenemos que $(a_n - R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n - S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a 0. Por lo tanto, la sucesión $(a_n - b_n - R_n + S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, lo

Tabla 5.1.: El número $\sqrt{2}+e = 4{,}13249539083\ldots$

n	c_n	b_n	$c_n + b_n$
1	1.25000000000	2.00000000000	3.25000000000
2	1.37500000000	2.25000000000	3.62500000000
3	1.43750000000	2.37037037037	3.80787037037
4	1.40625000000	2.44140625000	3.84765625000
5	1.42187500000	2.48832000000	3.91019500000
6	1.41406250000	2.52162637174	3.93568887174
7	1.41796875000	2.54649969704	3.96446844704
8	1.41601562500	2.56578451395	3.98180013895
9	1.41503906250	2.58117479171	3.99621697960
10	1.41455078125	2.59374246010	4.00829324135
11	1.41430664063	2.60419901190	4.01850565253

cual, combinado con la hipótesis de que $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, nos permite concluir que $(R_n - S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Ahora bien, tratándose $\pm r_0.r_1r_2\ldots$ y $\pm s_0.s_1s_2\ldots$ de dos desarrollos decimales admisibles, de la caracterización de la identidad de los desarrollos admisibles de la Proposición 5.1.2 concluimos que $\pm r_0.r_1r_2\cdots = \pm s_0.s_1s_2\ldots$, como queríamos demostrar. □

La proposición precedente admite una interpretación interesante desde el punto de vista práctico: supongamos que tenemos dos números reales α y β, que están dados por medio de dos sucesiones de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$, y queremos realizar una operación aritmética $\alpha\star\beta$ con ellos. La caracterización de las sucesiones de Cauchy que definen el mismo desarrollo decimal (Proposición 5.2.6) asegura que el desarrollo decimal admisible que define la sucesión $(a_n\star b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es precisamente el de $\alpha\star\beta$. Así vemos que **podemos extender la operatoria con desarrollos decimales infinitos admisibles a cualquier par de sucesiones de Cauchy que determinen los números reales en cuestión**.

Ejemplo 5.2.7. *Supongamos, como en el Ejemplo 5.2.3, que queremos sumar $\sqrt{2}$ y e. En términos más realistas que en el Ejemplo 5.2.3, a fin de operar con $\sqrt{2}$ vamos a considerar, por ejemplo, la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos medios del método de bisección aplicado a la ecuación $x^2 = 2$ de la Sección 2.1. Asimismo, vamos a considerar a e como el número real determinado por la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n := (1+1/n)^n$ para cada $n\in\mathbb{N}$, que vamos a estudiar en la Sección 6.3.3. Podemos entonces obtener la suma $\sqrt{2}+e$ a partir de la sucesión $(b_n+c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En la Tabla 5.1 listamos los primeros diez términos correspondientes a las sucesiones $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n+c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

También podemos representar a $\sqrt{2}$ por medio de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de las aproximaciones provistas por el método de Newton aplicado a la ecuación $x^2 = 2$ de la Sección 2.2 y al número e por medio de la sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $d_n := (2+1/2+\cdots+1/n!)_{n\in\mathbb{N}}$ (ver la Sección 6.3.3), cuyos resultados listamos en la Tabla 5.2. Como puede constatarse de una inspección de ambas tablas, la sucesión $(a_n+d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ define $\sqrt{2}+e$ mucho más rápidamente que $(b_n+c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Tabla 5.2.: Otra aproximación de $\sqrt{2}+e = 4{,}13249539083\ldots$.

n	a_n	d_n	$a_n + d_n$
1	1.50000000000	2.00000000000	3.50000000000
2	1.41666666667	2.50000000000	3.91666666667
3	1.41421568627	2.66666666667	4.08088235294
4	1.41421356237	2.70833333333	4.12254689570
5	1.41421356237	2.71666666667	4.13088022904
6	1.41421356237	2.71805555556	4.13229117926
7	1.41421356237	2.71825396826	4.13246753063
8	1.41421356237	2.71827876985	4.13249233222
9	1.41421356237	2.71828152558	4.13249508795
10	1.41421356237	2.71828180115	4.13249536352
11	1.41421356237	2.71828182620	4.13249538857

De todas maneras, la Proposición 5.2.6 nos asegura que $(b_n + c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definen el mismo desarrollo decimal infinito admisible, el del número $\sqrt{2}+e$.

5.2.2. Propiedades de las operaciones aritméticas en $\mathbb{R}$

A partir del criterio de identificación de las sucesiones de Cauchy que definen el mismo desarrollo decimal podemos discutir algunas propiedades básicas de las operaciones aritméticas con números reales que hemos definido.

Teorema 5.2.8 (Propiedades de las operaciones aritméticas con números reales)**.** *Si α, β y γ son números reales arbitrarios, entonces:*

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;
3. $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, *y 0 es el único número real con esta propiedad;*
4. *existe un único número real $-\alpha$ tal que $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$;*
5. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;
6. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$;
7. $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$, *y 1 es el único número real con esta propiedad;*
8. *si $\alpha \neq 0$, entonces existe un único número real α^{-1} tal que $\alpha^{-1} \cdot \alpha = \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$;*
9. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Demostración. La demostración de los ítems 1, 4 y 5 es una consecuencia inmediata de las correspondientes propiedades de la suma y el producto en $\mathbb{Q}$. Discutamos a modo de ejemplo la propiedad conmutativa de la suma del ítem 1. Si $\alpha := \pm r_0.r_1r_2\ldots$ y $\beta := \pm s_0.s_1s_2\ldots$, y $R_N := \pm r_0.r_1\ldots r_N$ y $S_N := \pm s_0.s_1\ldots s_N$ son los correspondientes desarrollos de N dígitos para cada $N \geq 0$, la suma $\alpha+\beta$ es el desarrollo decimal infinito admisible que define la sucesión $(R_N+S_N)_{N>0}$, en tanto que la suma $\beta+\alpha$ es el desarrollo decimal infinito admisible que define la sucesión $(S_N+R_N)_{N>0}$. Ahora bien, dado que R_N y S_N son números racionales, tenemos que $R_N+S_N = S_N+R_N$ para cada $N \geq 0$, de lo que concluimos que los correspondientes desarrollos decimales admisibles coinciden, es decir, $\alpha+\beta = \beta+\alpha$.

Consideramos ahora la propiedad asociativa del ítem 2. Sea $\alpha := \pm r_0.r_1r_2\ldots$, $\beta := \pm s_0.s_1s_2\ldots$ y $\gamma := \pm t_0.t_1t_2\ldots$, y sean $R_N := \pm r_0.r_1\ldots r_N$, $S_N := \pm s_0.s_1\ldots s_N$ y $T_N := \pm t_0.t_1\ldots t_N$ los correspondientes desarrollos de N dígitos para cada $N \geq 0$. Asimismo, sean $\alpha+\beta := \pm u_0.u_1u_2\ldots$ y $\beta+\gamma := \pm v_0.v_1v_2\ldots$. Tenemos que probar que las sucesiones $(R_N+V_N)_{N>0}$ y $(U_N+T_N)_{N>0}$ determinan el mismo desarrollo decimal. De acuerdo con nuestra caracterización “operativa” de la relación entre una sucesión de Cauchy y el desarrollo decimal que ésta define (Lema 5.2.5), tenemos que

$$\lim_{N\to\infty}(R_N+S_N-U_N) = 0 \text{ y } \lim_{N\to\infty}(S_N+T_N-V_N) = 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{N\to\infty}\big(R_N+V_N-(U_N+T_N)\big) = \lim_{N\to\infty}\big(R_N+S_N-U_N-(S_N+T_N-V_N)\big) = 0.$$

Por lo tanto, nuestro criterio de identificación de las sucesiones que Cauchy que definen el mismo desarrollo decimal admisible (Proposición 5.2.6) asegura que $(R_N+V_N)_{N>0}$ y $(U_N+T_N)_{N>0}$ definen el mismo desarrollo decimal, es decir, $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$. Un argumento similar demuestra los ítems 6 y 9.

A fin de demostrar 3, observamos que el número real 0 tiene el desarrollo decimal $0{,}00\ldots$, que satisface la condición $\alpha+0 = 0+\alpha = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. En efecto, si $\alpha := \pm r_0.r_1r_2\ldots$ y $R_N := \pm r_0.r_1\ldots r_N$ para cada $N \geq 0$, entonces

$$(R_N)_{N>0} + (0{,}0\ldots0)_{N>0} = (R_N)_{N>0} = (0{,}0\ldots0)_{N>0} + (R_N)_{N>0}.$$

La unicidad del elemento neutro para la suma es una consecuencia directa de su definición: si 0 y $\widetilde{0}$ son dos números reales con esta propiedad, entonces $0 = 0+\widetilde{0} = \widetilde{0}$. La demostración de 7 es similar.

Finalmente demostramos 8. Sea $\alpha := \pm r_0.r_1r_2\ldots$ y sea $R_N := \pm r_0.r_1\ldots r_N$ el desarrollo de N dígitos de α para cada $N \geq 0$. Dado que $\alpha \neq 0$, tenemos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(1/R_N)_{N>N_0}$ es de Cauchy, y por ende representa un número real que notamos α^{-1}. Sea $\alpha^{-1} := \pm s_0.s_1s_2\ldots$ y $S_N := \pm s_0.s_1\ldots s_N$ para cada $N \geq 0$. El Lema 5.2.5 asegura que $\lim_{N\to\infty}(S_N - 1/R_N) = 0$. En consecuencia, dado que

$$\lim_{N\to\infty} R_N\cdot S_N = \lim_{N\to\infty}\big(R_N\cdot(S_N-1/R_N)+1\big) = 1,$$

concluimos que $\alpha\cdot\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\cdot\alpha = 1$. Finalmente, en lo que respecta a la unicidad del inverso

multiplicativo, observamos que si $\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ satisfacen $\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\gamma$, entonces $\beta = (\beta\cdot\alpha)\cdot\beta = \beta\cdot(\alpha\cdot\beta) = \beta\cdot(\alpha\cdot\gamma) = (\beta\cdot\alpha)\cdot\gamma = (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \gamma$, lo que demuestra la unicidad. □

Ejercicio 5.2.9. *Completar la demostración del Teorema 5.2.8.*

Cabe destacar que un conjunto con dos operaciones aritméticas $+, \cdot$ que satisfacen las propiedades 1–9 mencionadas es lo que se denomina un **cuerpo**. Así, del teorema precedente concluimos que el conjunto de los números reales junto con las operaciones de la Definición 5.2.2 resulta un cuerpo, denominado el **cuerpo de los números reales**.

Asimismo, gracias a las propiedades aritméticas de los límites vemos que las operaciones aritméticas que hemos definido extienden efectivamente las operaciones aritméticas de $\mathbb{Q}$, es decir, $\mathbb{R}$ es una **extensión (de cuerpos)** de $\mathbb{Q}$. Más precisamente, una consecuencia inmediata de las propiedades aritméticas de los límites (Teorema 3.1.27) es el siguiente resultado.

Lema 5.2.10. *Sean $\pm r_0.r_1r_2\ldots$ y $\pm s_0.s_1s_2\ldots$ los desarrollos decimales admisibles de α y $\beta \in \mathbb{Q}$ respectivamente. Si $R_N := \pm r_0.r_1\ldots r_N$ y $S_N := \pm s_0.s_1\ldots s_N$, entonces*

- *$(R_N \pm S_N)_{N>0}$ converge a $\alpha \pm \beta$;*
- *$(R_N \cdot S_N)_{N>0}$ converge a $\alpha\cdot\beta$;*
- *si $\beta \neq 0$, entonces $(R_N/S_N)_{N>0}$ converge a α/β.*

Esto muestra que el cuerpo de los números racionales, $\mathbb{Q}$, está naturalmente incluido en $\mathbb{R}$, representando cada número racional por su desarrollo decimal admisible infinito.

5.3. La estructura de orden de $\mathbb{R}$

La siguiente cuestión es determinar cómo se ordenan los números reales, es decir, dados dos desarrollos decimales infinitos admisibles, establecer si resultan comparables, y en tal caso, cuál de los dos es el mayor. Esta noción de orden se puede obtener siguiendo dos caminos alternativos: o bien se define una relación de orden que satisfaga todas las propiedades requeridas, o se define una noción de **positividad**, a partir de la cual se obtiene un orden.

En el caso de los desarrollos decimales admisibles, resulta más simple introducir una noción de positividad que de orden, por lo que vamos a seguir la segunda alternativa. En tal sentido, luego de introducir una noción de positividad vamos a demostrar que el conjunto de los números reales positivos es cerrado para la suma y el producto, y vamos a ver que el conjunto de los números positivos induce una partición en el conjunto de los números reales: los positivos, sus inversos aditivos (es decir, los negativos) y 0. Estas propiedades serán suficientes para definir un orden total en $\mathbb{R}$ que resulte compatible con la estructura de cuerpo de $\mathbb{R}$: diremos que un número real es mayor que otro si su diferencia es un número positivo.

5.3.1. La noción de positividad

Nuestra idea intuitiva es que un número real positivo es aquel cuyos desarrollos decimales de N dígitos son positivos.

Definición 5.3.1. *Sea α un número real. Diremos que:*

- *α es* **positivo**, *y escribimos $\alpha > 0$, si su desarrollo decimal admisible es de la forma $r_0.r_1r_2\dots$ y existe $n_0 \geq 0$ tal que $r_{n_0} \neq 0$.*
- *α es* **negativo**, *y escribimos $\alpha < 0$, si su desarrollo decimal admisible es de la forma $-r_0.r_1r_2\dots$ y existe $n_0 \geq 0$ tal que $r_{n_0} \neq 0$.*

Como habitualmente, escribimos $\alpha \geq 0$ si se satisface alguna de las condiciones $\alpha > 0$ o $\alpha = 0$, y $\alpha \leq 0$ si se satisface alguna de las condiciones $\alpha < 0$ o $\alpha = 0$.

Una consecuencia inmediata de nuestra definición de positividad y negatividad es que los números reales positivos inducen una partición en $\mathbb{R}$, formada por el conjunto de los reales positivos, sus inversos aditivos y 0.

Lema 5.3.2. *Sea α un número real arbitrario. Entonces, o bien $\alpha > 0$, o $\alpha = 0$, o $\alpha < 0$, siendo estas tres posibilidades mutuamente excluyentes.*

Propiedades de los reales positivos

El conjunto de los números reales positivos satisface las siguientes propiedades.

Lema 5.3.3. *Sean α y β números reales positivos. Entonces*

1. $\alpha + \beta > 0$,
2. $\alpha \cdot \beta > 0$,
3. $1/\alpha > 0$.

Demostración. Sean $\alpha := r_0.r_1r_2\dots$ y $\beta := s_0.s_1s_2\dots$, y sean $R_N := r_0.r_1\dots r_N$ y $S_N := s_0.s_1\dots s_N$ para cada $N \geq 0$. Tenemos que $\alpha + \beta$ y $\alpha \cdot \beta$ son los desarrollos decimales admisibles determinados por las sucesiones $(R_N + S_N)_{N>0}$ y $(R_N \cdot S_N)_{N>0}$ respectivamente. De la positividad de α y β concluimos que existe $N_0 \geq 0$ tal que $R_{N_0} > 0$ y $S_{N_0} > 0$. En consecuencia, teniendo en cuenta que las sucesiones $(R_N + S_N)_{N>0}$ y $(R_N \cdot S_N)_{N>0}$ son crecientes, deducimos que

$$R_N + S_N \geq R_{N_0} + S_{N_0} > \frac{1}{10^{N_0}} \;\text{ y }\; R_N \cdot S_N \geq R_{N_0} \cdot S_{N_0} \geq \frac{1}{10^{2N_0}}$$

para cada $N \geq N_0$, y por lo tanto, tanto el desarrollo de N_0 dígitos de $R_N + S_N$ como el de $2N_0$ dígitos de $R_N \cdot S_N$ son estrictamente positivos para cada $N \geq N_0$. Concluimos que $\alpha + \beta > 0$ y $\alpha \cdot \beta > 0$, esto es, la validez de las propiedades 1 y 2.

Por último, discutimos la demostración del ítem 3. Si $\alpha := r_0.r_1r_2\dots > 0$, tenemos que existe $N_0 \geq 0$ tal que $r_{N_0} > 0$. En consecuencia, la sucesión de Cauchy $(1/R_N)_{N>N_0}$ representa a $1/\alpha$. Siendo una sucesión de Cauchy, $(R_N)_{N>0}$ está acotada superiormente, y por lo tanto existe $M > 0$ tal que $0 < R_N \leq 10^M$ para cada $N \geq N_0$. En consecuencia, $1/R_N \geq 1/10^M$ para cada $N \geq N_0$, de donde concluimos que el desarrollo de M dígitos de $1/R_N$ es estrictamente positivo para cada $N \geq N_0$. Deducimos de esto que $1/\alpha > 0$. □

5.3.2. El orden de $\mathbb{R}$

Habiendo establecido todas las propiedades que necesitamos sobre los números reales positivos, podemos finalmente introducir una noción de orden sobre $\mathbb{R}$.

Definición 5.3.4 (Orden en $\mathbb{R}$). *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, diremos que*

- *$\alpha \leq \beta$ si $\alpha - \beta \leq 0$, es decir, si $\alpha - \beta$ es negativo o 0;*
- *$\alpha \geq \beta$ si $\alpha - \beta \geq 0$, es decir, si $\alpha - \beta$ es positivo o 0.*

La relación de orden así definida satisface las siguientes propiedades.

Teorema 5.3.5 (Propiedades del orden de los números reales). *Si α, β y γ son números reales arbitrarios, entonces valen las siguientes propiedades:*

1. *si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$, entonces $\alpha = \beta$;*
2. *si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma$, entonces $\alpha \leq \gamma$;*
3. *si $\alpha \leq \beta$, entonces $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$;*
4. *si $\alpha \leq \beta$ y $\gamma \geq 0$, entonces $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$;*
5. *exactamente una de las tres condiciones $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ o $\alpha > \beta$ se satisface.*

Demostración. Dado que $\alpha \geq \beta$ si y solo si $\alpha - \beta \geq 0$, y $\alpha \leq \beta$ si y solo si $\alpha - \beta \leq 0$, la afirmación del ítem 1 es equivalente a demostrar que si $\gamma \geq 0$ y $\gamma \leq 0$, entonces $\gamma = 0$. Para esto, teniendo en cuenta que los reales positivos, los reales negativos y 0 inducen una partición de $\mathbb{R}$ (Lema 5.3.2), las condiciones $\gamma \geq 0$ y $\gamma \leq 0$ solo pueden satisfacerse simultáneamente si $\gamma = 0$.

Las demostraciones de los restantes ítems son consecuencias del hecho de que los reales positivos son cerrados por sumas y productos (Lema 5.3.3) e inducen una partición de $\mathbb{R}$ (Lema 5.3.2), y quedan por lo tanto como ejercicio, salvo el caso del ítem 4 en el cual $\gamma = 0$. Este caso es consecuencia inmediata de la siguiente observación: si η es un número real arbitrario, entonces $\eta \cdot 0 = 0$. Para ver esto, observamos que $\eta \cdot 0 = \eta \cdot (0+0) = \eta \cdot 0 + \eta \cdot 0$, de donde se deduce, sumando a ambos miembros $-\eta \cdot 0$, que $\eta \cdot 0 = 0$. □

Ejercicio 5.3.6. *Demostrar los ítems 2, 3 y 4 del Teorema 5.3.5.*

Cabe destacar que la propiedad del ítem 5 es lo que habitualmente se denomina la **Ley de tricotomía**, y garantiza que el orden que hemos definido sobre el conjunto de los desarrollos decimales admisibles es **total**, es decir, si α, β y γ son números reales arbitrarios, valen las siguientes propiedades:

- si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$, entonces $\alpha = \beta$;
- si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma$, entonces $\alpha \leq \gamma$;
- exactamente una de las tres condiciones $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ o $\alpha > \beta$ se satisface.

A su vez, este orden resulta **compatible** con las operaciones aritméticas de los números reales (Definición 5.2.2), es decir, si α, β y γ son desarrollos decimales admisibles, valen las siguientes propiedades:

- si $\alpha \leq \beta$, entonces $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$,
- si $\alpha \leq \beta$ y $\gamma \geq 0$, entonces $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Un cuerpo con un orden total que es compatible con las operaciones aritméticas es lo que se denomina un **cuerpo ordenado**. Así, el conjunto de los números reales, con las operaciones aritméticas de la Definición 5.2.2 y el orden de la Definición 5.3.4 resulta un cuerpo ordenado, denominado el **cuerpo ordenado de los números reales**

Más aún, el orden que hemos definido es **arquimediano**, como demostramos en el siguiente lema.

Lema 5.3.7. *$\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, todo número real (estrictamente) positivo es mayor que $1/n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\alpha := r_0.r_1r_2\ldots > 0$ un número real positivo arbitrario. Entonces, de acuerdo con la definición de positividad (Definición 5.3.1), tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r_{n_0} \neq 0$. Por lo tanto, $\alpha - r_{n_0}/10^{n_0} \geq 0$, lo cual implica que $\alpha > 1/(2 \cdot 10^{n_0})$. Esto demuestra la arquimedianidad de $\mathbb{R}$. □

Una caracterización operativa del orden en $\mathbb{R}$

Dados dos números reales α y β, hemos dicho que α es mayor que β si la diferencia $\alpha - \beta$ es un número positivo. Ahora bien, a fin de determinar si $\alpha > \beta$ tenemos que calcular la diferencia $\alpha - \beta$, lo cual en principio nos obliga a considerar los infinitos dígitos decimales de α y β. Sin embargo, habitualmente solo consideramos los desarrollos decimales de α y β hasta el punto en que ambos difieren. En tal sentido, tenemos el siguiente resultado.

Lema 5.3.8. *Sean $\pm r_0, r_1r_2\ldots$ y $\pm s_0, s_1s_2\ldots$ dos desarrollos decimales admisibles distintos, y sea $N_0 \geq 0$ el mínimo índice para el cual $\pm r_{N_0} \neq \pm s_{N_0}$. Entonces $\alpha > \beta$ si y solo si $\pm r_{N_0} > \pm s_{N_0}$.*

Demostración. Si α y β tienen distinto signo, digamos, $\alpha \geq 0$ y $\beta < 0$, entonces $\alpha > \beta$ y el primer dígito decimal en que α y β difieren se encuentra en la primer posición $N_0 \geq 0$ para la cual r_{N_0} o s_{N_0} nos son ambos iguales a cero. En particular, o bien $r_{N_0} > 0 \geq -s_{N_0}$, o bien $r_{N_0} \geq 0 > -s_{N_0}$, y en ambos casos constatamos la validez del enunciado.

Podemos entonces suponer sin pérdida de generalidad que α y β tienen el mismo signo, digamos positivo. Sea $R_N := r_0.r_1\ldots r_N$ y $S_N := s_0.s_1\ldots s_N$ para cada $N \geq 0$. Supongamos en primer lugar que $r_{N_0} > s_{N_0}$. Si $N \geq N_0$, entonces

$$R_N - S_N = \frac{r_{N_0} - s_{N_0}}{10^{N_0}} + \cdots + \frac{r_N - s_N}{10^N} \geq \frac{1}{10^{N_0}} + \sum_{n=N_0+1}^{N} (r_n - s_n)\frac{1}{10^n}.$$

Dado que $s_0.s_1s_2\dots$ es un desarrollo decimal admisible, existe $M_0 > N_0$ tal que $s_{M_0} < 9$. En particular, tenemos que $r_{M_0} - s_{M_0} \geq -8$, y por lo tanto, para cada $M \geq M_0$,

$$R_M - S_M \geq \frac{1}{10^{n_0}} - \sum_{n=n_0+1}^{M} \frac{9}{10^n} + \frac{1}{10^{M_0}} \geq \frac{1}{10^{n_0}}\left(1 - \sum_{n=1}^{M-n_0} \frac{9}{10^n}\right) + \frac{1}{10^{M_0}} \geq \frac{1}{10^{M_0}}.$$

Concluimos que el desarrollo de M dígitos de $\alpha - \beta$ es estrictamente positivo para cada $M \geq M_0$, y por lo tanto $\alpha - \beta > 0$, como queríamos ver.

Supongamos ahora que $\alpha > \beta$, o equivalentemente $\alpha - \beta > 0$. Tenemos entonces que la sucesión de Cauchy $(R_N - S_N)_{N\geq 0}$ define un desarrollo decimal admisible positivo $u_0.u_1u_2\dots$. Supongamos que $u_{M_0} > 0$ y sea $N \geq N_0$ suficientemente grande de modo que el desarrollo decimal de M_0 dígitos de $R_N - S_N$ es $u_0.u_1\dots u_{M_0}$. Entonces

$$\frac{u_{M_0}}{10^{M_0}} \leq R_N - S_N = \frac{r_{N_0} - s_{N_0}}{10^{N_0}} + \cdots + \frac{r_N - s_N}{10^N} < \frac{r_{N_0} - s_{N_0} + 1}{10^{N_0}}.$$

Esto prueba que $r_{N_0} - s_{N_0} + 1 > 0$, y por lo tanto, que $r_{N_0} \geq s_{N_0}$. Dado que $r_{N_0} \neq s_{N_0}$, concluimos que $r_{N_0} > s_{N_0}$. □

En otras palabras, obtenemos la siguiente caracterización "operativa" del orden de $\mathbb{R}$: a fin de comparar dos desarrollos decimales admisibles distintos, basta examinar el primer dígito en el cual ambos difieren.

5.A. Apéndice. Representación de punto flotante

Si bien nuestro enfoque de los números reales ha sido motivado a partir de tres problemas de carácter eminentemente práctico, la resolución de ecuaciones $f(x) = 0$, la minimización $\min_{x\in A} f(x)$ y el problema de equilibrio $f(x) = x$, es importante tener en cuenta que, en la práctica, **es imposible representar números reales por medio de desarrollos decimales admisibles infinitos**, dado que las computadoras solo pueden almacenar cantidades finitas de dígitos. El propósito de este apéndice es discutir brevemente cómo se representan los números reales en las computadoras y cómo éstas operan con ellos (para un tratamiento en profundidad del tema puede verse, por ejemplo, [Gol91] o [Hig96]).

5.A.1. Números de punto flotante y redondeo

Sea $\alpha := \pm r_0.r_1r_2\dots$ un número real arbitrario. Como hemos dicho, la cantidad de dígitos disponible para representar en número real α en una computadora está acotada, por lo que es necesario tomar en cuenta la cantidad de dígitos necesarios para representar la parte entera r_0 de α. En tal sentido, observamos que el número entero r_0 tiene una única representación decimal de la forma $r_0 = q_m 10^m + \cdots + q_0 10^0$ donde, o bien $m = 0$ y $q_0 = 0$, o bien $q_i \in \{0,\dots,9\}$ para $i = 0,\dots,m$ y $q_m \neq 0$. Así, la representación decimal del número real α es de la forma

$$\alpha = \pm r_0.r_1r_2\cdots = \pm q_m 10^m + \cdots + q_1 10^1 + q_0 10^0 + r_1 10^{-1} + r_2 10^{-2} + \cdots$$

Si escribimos $q_{-i} := r_i$ para cada $i \geq 1$, obtenemos la siguiente expresión "compacta" para el desarrollo decimal de α:

$$\alpha = \pm q_m 10^m + \cdots + q_1 10^1 + q_0 10^0 + q_{-1} 10^{-1} + q_{-2} 10^{-2} + \cdots$$

Una **representación normalizada de punto flotante** del número real α es una representación del tipo

$$\alpha = \pm 10^e \cdot \beta, \quad \text{con } \beta = 0.d_1 d_2 \ldots,\ d_i \in \{0, \ldots, 9\} \text{ y } d_1 \neq 0.$$

Por ejemplo, las representaciones normalizadas de punto flotante de los números reales $-\sqrt{2}$ y $1/\sqrt{1000} = 0{,}0316227766\ldots$ son

$$-\sqrt{2} = -10^1 \cdot 0{,}1414213562\ldots \quad \text{y} \quad 1/\sqrt{1000} = 10^{-1} \cdot 0{,}316227766\ldots.$$

Cada número real **no nulo** posee una única representación normalizada de punto flotante (el caso $\alpha = 0$ se trata de forma especial). En dicha representación, e se denomina el **exponente** y β se denomina la **mantisa**.

En una computadora la cantidad de dígitos disponibles para el exponente y la mantisa están acotados. Si se disponen de t dígitos para la mantisa, entonces los únicos números que pueden representarse en forma exacta son los de la forma

$$\alpha = \pm 10^e \cdot 0.d_1 d_2 \ldots d_t, \text{ con } e_{min} \leq e \leq e_{max}, \tag{5.1}$$

donde e_{min} y e_{max} son el menor y el mayor exponente admitidos en función de la cantidad de dígitos disponibles para el exponente. Fijada la cantidad t de dígitos disponibles y el rango de exponentes admitidos, cada número real que admite una representación decimal como en (5.1) se denomina un **número de punto flotante**, en tanto que el conjunto $F := F(t, e_{min}, e_{max})$ de todos los números de punto flotante se denomina un **sistema de números de punto flotante**[1].

Fijemos la cantidad de dígitos t, y e_{min}, e_{max}, esto es, el rango de exponentes que admitimos. Denotemos por $G \subset \mathbb{R}$ al conjunto de todos los números reales que se representan con t dígitos sin restricciones sobre el exponente admitido, esto es,

$$G := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha = \pm 10^e \cdot (0.d_1 d_2 \ldots d_t) \text{ con } e \in \mathbb{Z} \text{ y } d_1 \neq 0\} \cup \{0\}.$$

Tenemos entonces una función de **redondeo** $fl : \mathbb{R} \to G$, definida de la siguiente forma[2]:

$$fl\big(\pm 10^e \cdot (0.d_1 d_2 \ldots)\big) := \pm 10^e \cdot (0.d_1 d_2 \ldots \widehat{d_t}), \text{ donde } \widehat{d_t} := \begin{cases} d_t & \text{si } d_{t+1} \leq 4 \\ d_{t+1} & \text{si } d_{t+1} \geq 5. \end{cases}$$

Por ejemplo, si $t = 5$, $fl(-\sqrt{2}) = -10^1 \cdot 0{,}14142$ y $fl(1/\sqrt{1000}) = 10^{-1} \cdot 0{,}31623$.

Los números reales α para los cuales el redondeo $fl(\alpha)$ pertenece a F, que vamos a denominar los números **en el rango de** F, son los únicos que admiten una **aproximación razonable** de punto flotante, a saber, $fl(\alpha)$. Para tales reales tenemos el siguiente resultado (ver, por ejemplo, [Hig96,

[1] Generalmente se utilizan representaciones en base 2 en lugar de representaciones en base 10.

[2] En realidad hay mejores estrategias de redondeo, aunque elijamos ésta por simplicidad.

Theorem 2.2]).

Lema 5.A.1. *Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $fl(\alpha) \in F$. Entonces* $\left| \dfrac{fl(\alpha) - \alpha}{\alpha} \right| \leq u := \dfrac{1}{2} 10^{1-t}$.

El número $u := \frac{1}{2} 10^{1-t}$ se denomina la **unidad de redondeo** y representa una medida básica del error relativo en cálculos que involucran números de punto flotante.

5.A.2. Aritmética de punto flotante

Los sistemas de aritmética en punto flotante en uso en las computadoras trabajan de forma tal que el resultado de todas las operaciones aritméticas se realizan como si éstas se calcularan en precisión infinita y luego se redondearan al correspondiente número de punto flotante. Más precisamente, si $\alpha, \beta \in F$ son dos números de punto flotante, el **modelo estándar** de aritmética de punto flotante supone que **el error relativo en la aritmética de punto flotante es del orden de la unidad de redondeo**, es decir,

$$fl(\alpha \star \beta) = (\alpha \star \beta)(1 + \delta), \text{ con } |\delta| \leq u,$$

donde $\star$ es alguna de las operaciones aritméticas $\{+, -, \cdot, \div\}$. De todas maneras, cabe destacar que la aritmética de punto flotante posee propiedades diferentes que las operaciones aritméticas exactas. Por ejemplo, la suma y el producto en la aritmética de punto flotante son conmutativas pero no asociativas, y tampoco satisfacen la ley distributiva. Asimismo, el fenómeno de **cancelación** en la resta de dos números de punto flotante "cercanos" puede magnificar significativamente errores presentes en los mismos.

6. Resolviendo los problemas modelo: nociones de completitud

En el capítulo anterior hemos extendido nuestra noción de "número", admitiendo como tales a los números reales, esto es, los desarrollos decimales infinitos admisibles. De esta manera, **hemos extendido el dominio** sobre el cual nos planteamos las cuestiones de existencia, unicidad y localización de las soluciones de nuestros problemas modelo. El propósito de este capítulo es discutir en qué sentido $\mathbb{R}$ constituye un "mejor" dominio que $\mathbb{Q}$ sobre el cual considerar tales problemas.

Dado que $\mathbb{R}$, del mismo modo que $\mathbb{Q}$, posee una estructura de cuerpo ordenado, los conceptos de distancia entre dos números racionales, y de sucesión de Cauchy y convergente de $\mathbb{Q}$ se generalizan *mutatis mutandis* a $\mathbb{R}$. Más precisamente, definimos el **valor absoluto** $|\alpha|$ de un número real α de la siguiente manera:

$$|\alpha| := \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \geq 0, \\ -\alpha & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

A su vez, definimos la **distancia** $d(\alpha,\beta)$ entre dos números reales α,β como el valor absoluto de su diferencia, es decir, $d(\alpha,\beta) := |\alpha-\beta|$.

Ejercicio 6.0.2. *Demostrar las siguientes propiedades del valor absoluto:*

1. $|\alpha| \geq 0$ *para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $|\alpha| = 0$ *si y solo si* $\alpha = 0$.
2. $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ *para cada* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.
3. $|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$ *para cada* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 6.0.3. *Demostrar las siguientes propiedades de la distancia:*

1. $d(\alpha,\beta) \geq 0$ *y* $d(\alpha,\beta) = 0$ *si y solo si* $\alpha = \beta$ *para cada* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.
2. $d(\alpha,\beta) = d(\beta,\alpha)$ *para cada* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.
3. $d(\alpha,\beta) \leq d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$ *para cada* $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$.

Finalmente, definimos los conceptos de sucesión de Cauchy de $\mathbb{R}$ y sucesión convergente de $\mathbb{R}$ de forma análoga a como los hemos definido en $\mathbb{Q}$. Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ se dice **de Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para cada $n,m \geq n_0$. Asimismo, diremos que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ **converge** a $\alpha \in \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$. Cabe destacar que todos los resultados "generales" sobre sucesiones de $\mathbb{Q}$ resultan también válidos para sucesiones de $\mathbb{R}$, con demostraciones completamente análogas a las que hemos dado. Entre otros, cabe destacar que la unicidad del límite (Lema 3.1.25), las propiedades aritméticas de los límites (Teorema 3.1.27), el hecho de que las sucesiones convergentes

son acotadas (Lema 3.1.28), la propiedad sandwich (Lema 3.1.35), el principio de conservación del número (Lema 3.1.40) y el hecho de que sucesiones en las cuales la diferencia entre términos sucesivos decrece de manera exponencial son de Cauchy (Lema 3.3.8), resultan válidos también para sucesiones de $\mathbb{R}$, por lo que, en lo que sigue, vamos a usar estos resultados.

6.1. Completitud con sucesiones de Cauchy

El resultado clave que nos condujo a la introducción de los números reales fue la propiedad de estabilización de dígitos (Proposición 4.3.2) o de "convergencia" de las sucesiones de Cauchy (Teorema 4.3.6): una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ define un único desarrollo decimal infinito admisible. Con el lenguaje que hemos introducido en el capítulo previo podemos describir esta propiedad de forma mucho más simple: una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ converge en $\mathbb{R}$.

Lema 6.1.1. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ y sea $\alpha = \pm r_0.r_1r_2\ldots \in \mathbb{R}$ el desarrollo decimal infinito admisible que ésta define. Entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que α es un número racional de la forma $R/10^N$, con $R \in \mathbb{Z}$. Entonces, por definición, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α en $\mathbb{Q}$, por lo que también lo hace en $\mathbb{R}$.

En consecuencia, sin pérdida de generalidad podemos suponer que α no es un racional de la forma $R/10^N$, con $R \in \mathbb{Z}$. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $\alpha = \pm r_0.r_1r_2\ldots$ es el desarrollo decimal determinado por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $M(N) \in \mathbb{N}$ tal que el desarrollo decimal de N dígitos de a_n es $R_N := \pm r_0.r_1r_2\ldots r_N$ para cada $n \geq M(N)$. Por lo tanto, si $n \geq M(N)$, tenemos

$$|a_n - \alpha| = |a_n - R_N + R_N - \alpha| \leq |a_n - R_N| + |R_N - \alpha| \leq \frac{1}{10^N} + \frac{1}{10^N} = \frac{2}{10^N}.$$

Así, si elegimos $N \in \mathbb{N}$ tal que $2/10^N < \varepsilon$, tendremos que $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ para todo $n \geq M(N)$. Esto demuestra que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α en $\mathbb{R}$. □

De acuerdo con el resultado precedente, la consideración de los números reales conduce a una noción extendida de convergencia según la cual las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{Q}$ convergen. Que las sucesiones de Cauchy converjan es una propiedad fundamental a la hora de construir un "buen" dominio para resolver ecuaciones (o problemas de minimización, o problemas de equilibrio), dado que procesos tales que como el método de bisección o el de Newton, que constituyen dos "prototipos" fundamentales de métodos de aproximación, producen sucesiones de Cauchy. En tal sentido, si $\mathbb{R}$ es un "buen" dominio para resolver ecuaciones, todas las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{R}$ deberían converger en $\mathbb{R}$. Postulamos que esto es así, que $\mathbb{R}$ está "**completo**" en el sentido de que las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{R}$ convergen en $\mathbb{R}$. Sin embargo, no vamos a analizar ahora esta afirmación; por el momento, la vamos a admitir como "hipótesis". Más adelante, luego de haber considerado funciones continuas a valores reales y nuestros problemas modelo con tales funciones, vamos a retomar su discusión.

Hipótesis 1 (Completitud con sucesiones de Cauchy)**.** *Toda sucesión de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge en $\mathbb{R}$.*

En lo que sigue, vamos a reexaminar los métodos de bisección y de Newton a fin de determinar qué propiedades adicionales debería poseer $\mathbb{R}$ a fin de resultar un "buen" dominio para resolver ecuaciones o problemas de minimización o de equilibrio.

6.2. Completitud con encaje de intervalos

Si bien, como hemos demostrado, la sucesión $(c_n)_{n>0}$ de puntos medios del método de bisección de la Sección 2.1 resulta una sucesión de Cauchy, el método de bisección se describe naturalmente como un proceso de "refinamiento" progresivo de intervalos. La sucesión de intervalos $(I_n)_{n>0} := ([a_n, b_n])_{n>0}$ que produce el método de bisección tiene dos características fundamentales, que permiten establecer la correctitud del mismo:

1. cada intervalo I_n es cerrado y acotado, y los intervalos están "encajados", es decir, $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$;
2. $b_n - a_n = 2^{-n}$.

De la segunda condición concluimos que **la longitud de los intervalos I_n tiende a** 0. Esto a su vez implica que las sucesiones $(a_n)_{n>0}$ y $(b_n)_{n>0}$ son de Cauchy y convergen al mismo número real. Éste es el contenido de los siguientes resultados.

Lema 6.2.1. *La sucesión $(a_n)_{n>0}$ es de Cauchy.*

Demostración. Observamos que $a_{n+k} \in [a_n, b_n]$ para todo $k \geq 0$, dado que el hecho de que los intervalos I_n estén encajados asegura que $I_n \supset I_{n+k}$. Así vemos que $0 \leq a_{n+k} - a_n \leq b_n - a_n = 2^{-n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Entonces, para $n \geq n_0$, tenemos que $2^{-n} \leq 2^{-n_0} \leq 1/n_0 < \varepsilon$, y por lo tanto $0 \leq a_{n+k} - a_n \leq 2^{-n} \leq 1/n_0 < \varepsilon$. En conclusión, para cada $n \geq n_0$ resulta $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$, lo que demuestra que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ es de Cauchy. □

Ejercicio 6.2.2. *Demostrar que la sucesión $(b_n)_{n>0}$ es de Cauchy.*

Lema 6.2.3. *Las sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$ y $(b_n)_{n\geq 0}$ convergen al mismo número real α.*

Demostración. El Lema 6.2.1 y el Ejercicio 6.2.2 aseguran que $(a_n)_{n>0}$ y $(b_n)_{n>0}$ son sucesiones de Cauchy de $\mathbb{Q}$, y por ende, convergen en $\mathbb{R}$ (Lema 6.1.1). Dado que $|b_n - a_n| \leq 2^{-n}$ para cada $n \geq 0$, la propiedad sandwich (Lema 3.1.35) implica que $(b_n - a_n)_{n>0}$ converge a 0. Así, las propiedades aritméticas de los límites aseguran que $(a_n)_{n>0}$ y $(b_n)_{n\geq 0}$ convergen al mismo número real. □

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) := x^2 - 2$. Dado que f es continua tenemos que $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(\alpha)$. Asimismo, por construcción, resulta $f(a_n) \leq 0$ y $f(b_n) \geq 0$ para cada $n \geq 0$. El principio de conservación del número (Lema 3.1.40) asegura entonces que $f(\alpha) \leq 0$ y $f(\alpha) \geq 0$ simultáneamente, de lo que deducimos que

$$f(\alpha) = 0.$$

En particular, dado que las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo número real α, vemos que la sucesión de intervalos $(I_n)_{n>0}$ "converge" (dicho esto en un sentido informal) a este número real.

Una forma de captar este número real es por medio de la **intersección infinita** $\bigcap_{n>0} I_n$ de la sucesión de intervalos $(I_n)_{n>0}$, que describe precisamente el conjunto de números reales α que satisfacen las condiciones $a_n \leq \alpha \leq b_n$ para cada $n \geq 0$. Si $\mathbb{R}$ es un "buen" dominio para resolver ecuaciones, dicha intersección debe consistir de un **único** punto α, que resuelve la ecuación $x^2 = 2$. Nuevamente vamos a postular la validez de esta afirmación, que dejamos registrada en la forma de una nueva hipótesis de completitud.

Hipótesis 2 (Completitud con encaje de intervalos)**.** *La intersección de cada sucesión de intervalos cerrados, acotados y "encajados" $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ de $\mathbb{R}$ cuya longitud tiende a 0 es un número real α, es decir, $\bigcap_{n>0} I_n = \{\alpha\}$.*

Ejercicio 6.2.4. *En general, no es necesariamente cierto que una sucesión de intervalos encajados* **arbitrarios** *tenga intersección no vacía. En los siguientes ítems ilustramos esta afirmación con dos situaciones particulares.*

1. *Exhibir una sucesión de intervalos* **abiertos** *y encajados $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuya longitud tiende a cero con $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$.*

2. *Exhibir una sucesión de intervalos cerrados y encajados $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$.*

Ejercicio 6.2.5 (Encaje de intervalos y sucesiones de Cauchy)**.** *Sea $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos encajados tal que la sucesión $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy.*

6.2.1. Encaje de intervalos y desarrollos decimales infinitos.

El método de bisección no es la única situación "familiar" que se describe naturalmente por medio de un encaje de intervalos. Un ejemplo de suma importancia en este sentido es el de los desarrollos decimales infinitos. En efecto, sea $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ y sea $r_0.r_1r_2\ldots$ su desarrollo infinito admisible. De acuerdo con el resultado sobre la existencia y unicidad de los desarrollos decimales en $\mathbb{Q}$ (Corolario 4.2.3), empleando la notación $R_N := r_0.r_1\ldots r_N$ para cada $N \geq 0$, tenemos que $R_N \leq \alpha < R_N + 1/10^N$ para cada $N \geq 0$, o equivalentemente,

$$\alpha \in I_N := \left[R_N, R_N + \frac{1}{10^N}\right).$$

Afirmamos que los intervalos I_N están encajados, es decir, que $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$. En efecto, observamos que

$$R_N = r_0 + \frac{r_1}{10} + \cdots + \frac{r_N}{10^N} \leq r_0 + \frac{r_1}{10} + \cdots + \frac{r_N}{10^N} + \frac{r_{N+1}}{10^{N+1}} = R_{N+1},$$

$$R_{N+1} + \frac{1}{10^{N+1}} \leq r_0 + \frac{r_1}{10} + \cdots + \frac{r_N}{10^N} + \frac{10}{10^{N+1}} = R_N + \frac{1}{10^N},$$

de donde concluimos que $I_N \supset I_{N+1}$ para cada $N \geq 0$. En particular, tenemos que $\alpha \in \overline{I}_N := [R_N, R_N + \frac{1}{10^N}]$ para cada $N \geq 0$, estando la sucesión $(\overline{I}_N)_{N>0}$ constituida por intervalos cerrados, acotados y encajados cuya longitud $1/10^N$ converge a 0.

Más generalmente, si $r_0.r_1r_2\ldots$ es un número real arbitrario, y definimos para cada $N \geq 0$ el intervalo $\overline{I}_N$ en la forma $\overline{I}_N := [R_N, R_N + \frac{1}{10^N}]$, siendo $R_N := r_0.r_1\ldots r_N$, vemos que la correspondiente sucesión $(I_N)_{N>0}$ satisface las condiciones de la Hipótesis 2 de completitud. En tal sentido, la Hipótesis 2 de completitud afirma que el conjunto $\bigcap_{N>0} \overline{I}_N$ consiste de un solo punto, precisamente $r_0.r_1r_2\ldots$.

Ejercicio 6.2.6 (El método de decasección). *Hemos dicho que aplicamos el método de bisección a $x^2 = 2$ a fin de obtener el desarrollo decimal infinito de la solución de dicha ecuación. Desde este punto de vista, podemos pensar en métodos alternativos orientados específicamente a obtener dichos dígitos, en lugar de obtener aproximaciones de la solución de $x^2 = 2$ a partir de las cuales se obtengan los dígitos. Una posibilidad es el denominado* **método de decasección**.

La idea del método es similar a la del método de bisección: se trata de un proceso de "refinamiento" progresivo del intervalo de búsqueda. La diferencia esencial entre ambos métodos es que en el N–ésimo paso del método de decasección, el intervalo elegido posee una característica particularmente útil para la búsqueda de dígitos decimales: **todos los racionales en dicho intervalo poseen el mismo desarrollo de N dígitos**.

Más precisamente, sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 - 2$, y supongamos que partimos del intervalo inicial $I_0 := [a_0; b_0] := [1; 2]$, para el cual tenemos $f(a_0) < 0 < f(b_0)$. El siguiente intervalo, I_1, se determina del siguiente modo: se subdivide el intervalo I_0 en diez intervalos consecutivos de longitud $1/10$, y se elige como $I_1 := [a_1, b_1]$ cualquiera de los 10 intervalos (digamos, por caso, el que esté "más a la izquierda") en el cual se satisfaga la condición $f(a_1) < 0 < f(b_1)$, excepto que exista algún extremo c de alguno de los 10 intervalos en el cual valga $f(c) = 0$. Prosiguiendo de esta manera, se obtiene una sucesión de intervalos $(I_n)_{n>0}$.

1. *Demostrar que los intervalos I_n son cerrados y acotados, están encajados y su longitud tiende a 0.*

2. *Suponiendo válida la Hipótesis 2 de completitud, resulta $\cap_{n>0} I_n = \{\alpha\}$. Demostrar que $\alpha^2 = 2$.*

3. *Demostrar que el desarrollo de N dígitos de a_n es el de α para cada $n \geq N$.*

6.3. Completitud con sucesiones monótonas y acotadas

Retomamos ahora lo que hemos hecho en la Sección 2.2. Recordamos que por medio de la aplicación del método de Newton hemos obtenido la siguiente sucesión $(a_n)_{n>0}$, cuyo comportamiento queremos analizar:

$$a_0 := 1{,}5, \quad a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad (n \geq 1). \tag{6.1}$$

Una primera observación es que $(a_n)_{n>0}$ es una sucesión **decreciente**, es decir, los términos a_n satisfacen la desigualdad $a_{n+1} \geq a_n$ para cada $n \geq 0$. Esto es una información importante sobre

el comportamiento de $(a_n)_{n>0}$. De hecho, como vamos a ver más adelante, para una sucesión decreciente existen dos posibilidades: o bien es **acotada inferiormente**, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \leq a_n$ para cada $n \geq 0$, en cuyo caso vamos a demostrar que es de Cauchy, o bien no lo es, y por lo tanto, no tiene límite (más precisamente, tiene límite infinito). Conclusiones similares se obtienen para una sucesión **creciente**, es decir, una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \leq a_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$: si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ resulta **acotada superiormente**, es decir, si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión es de Cauchy, mientras que en caso contrario la sucesión tiene límite infinito. En consecuencia, vamos a hablar generalmente de sucesiones **monótonas**, refiriéndonos indistintamente a sucesiones crecientes o decrecientes, y **acotadas**, refiriéndonos a sucesiones acotadas inferiormente y superiormente.

Ejemplo 6.3.1. *La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n := n/(n+1)$ es creciente. En efecto,*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Asimismo, se trata de una sucesión acotada, dado que $0 \leq a_n < 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Ejemplo 6.3.2. *La sucesión $(c_n)_{n>0}$ de puntos medios del método de bisección aplicado a la ecuación $x^2 = 2$ de la Sección 2.1 no es monótona, ya que, por ejemplo, $c_0 := 1{,}5 > c_1 := 1{,}25$ y $c_1 := 1{,}25 < c_2 := 1{,}375$ (ver la Tabla 4.1).*

Ejercicio 6.3.3. *Para cada una de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ cuyo término general se da a continuación, decidir si es o no monótona. En el caso de que alguna lo fuera, decidir si es creciente o decreciente.*

$$a_n = -\frac{1}{2^n}, \qquad a_n := \frac{n-1}{2n}, \qquad a_n = -n^3 + 2n + 1, \qquad a_n := \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar} \\ n-1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejercicio 6.3.4. *Sabiendo que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathbb{Q}$ de términos estrictamente positivos que satisface la relación $a_{n+1} = \frac{7n-1}{10n+5} \cdot a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, determinar si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona. Si la respuesta es afirmativa, decidir si es creciente o decreciente.*

Veamos que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ de (6.1) es decreciente y acotada inferiormente, de modo que, de acuerdo a lo que dicho anteriormente, resultará una sucesión de Cauchy. Cabe destacar que ya habíamos mostrado que $(a_n)_{n>0}$ es una sucesión de Cauchy por medio de un análisis específico en el Ejercicio 3.3.10.

Lema 6.3.5. *La sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ de (6.1) es decreciente y acotada inferiormente.*

Demostración. Analizamos en primer lugar la diferencia $a_{n+1} - a_n$. Tenemos que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - a_n = \frac{1}{a_n} - \frac{a_n}{2} = \frac{2 - a_n^2}{2a_n}.$$

Si combinamos esta observación con las desigualdades $a_n > 0$ y $a_n^2 > 2$, válidas para cada $n \geq 0$ (Lema 2.2.3), concluimos que $a_{n+1} < a_n$. Esto demuestra que $(a_n)_{n\geq 0}$ es decreciente. Por otro

lado, la desigualdad $a_n > 0$, válida para cada $n \geq 0$, muestra que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ está acotada inferiormente. Esto completa la demostración. □

En el Ejercicio 3.3.10 mostramos que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ de (6.1) es de Cauchy. Por lo tanto, dado que las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{Q}$ convergen en $\mathbb{R}$ (Lema 6.1.1), tenemos que $(a_n)_{n>0}$ converge en $\mathbb{R}$, de lo cual, como vemos a continuación, deducimos que el límite de dicha sucesión resuelve la ecuación $x^2 = 2$.

Lema 6.3.6. *Si* $\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n$*, entonces* $f(\alpha) = 0$.

Demostración. Observamos que $a_n \geq 1$ para cada $n \geq 0$, dado que $a_n \geq 0$ y $a_n^2 > 2$ para cada $n \geq 0$ (Lema 2.2.3). En consecuencia, dado que $(a_n)_{n>0}$ converge a $\alpha \in \mathbb{R}$ (que deberá ser un real estrictamente positivo de acuerdo al "principio de conservación del número" (Lema 3.1.40)), concluimos que las sucesiones $(a_n/2)_{n>0}$ y $(1/a_n)_{n>0}$ convergen a $\alpha/2$ y $1/\alpha$ respectivamente. Por lo tanto, la sucesión $(a_{n+1})_{n>0} = (a_n/2 + 1/a_n)_{n>0}$ converge a $\alpha/2 + 1/\alpha$.

Por otro lado, la sucesión $(a_{n+1})_{n>0}$ converge a α, ya que el cambio de índice no modifica su comportamiento asintótico. Por lo tanto, debe ser $\alpha = \alpha/2 + 1/\alpha$, es decir, $\alpha/2 = 1/\alpha$, o lo que es lo mismo, $\alpha^2 = 2$, como queríamos demostrar. □

Como mencionamos anteriormente, sabemos que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ es de Cauchy (Ejercicio 3.3.10). Esto no es una consecuencia de una característica particular de la sucesión $(a_n)_{n>0}$ que nos ocupa (si bien la solución del Ejercicio 3.3.10 utiliza efectivamente las características particulares de la misma), sino un resultado de carácter general que discutimos a continuación.

6.3.1. Las sucesiones monótonas y acotadas son de Cauchy

El objetivo de esta sección es demostrar que cada sucesión monótona y acotada de $\mathbb{R}$ es de Cauchy. Para esto, notamos que demostrar que una sucesión dada es de Cauchy consiste en obtener intervalos cuya longitud tienda a 0 en donde se encuentren todos los términos de la sucesión de un término en adelante. Para mostrar que una sucesión monótona y acotada es de Cauchy vamos a aplicar nuevamente una técnica de "refinamiento progresivo" de intervalos en el espíritu del método de bisección.

Teorema 6.3.7. *Toda sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}$ *monótona y acotada es de Cauchy.*

Demostración. Analizamos solamente el caso de las sucesiones crecientes y acotadas superiormente, dado que la afirmación para el caso restante se demuestra de forma similar. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente y acotada superiormente y sea $B_0 > 0$ una cota superior para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dado que la sucesión es creciente, tenemos que $A_0 := a_0 \leq a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Asimismo, tenemos que $a_n \leq B_0$, y por lo tanto $A_0 \leq a_n \leq B_0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. A fin de demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, vamos a construir dos sucesiones $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que refinan progresivamente a A_0 y B_0, en el sentido de que la "cola" de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en $[A_k, B_k]$ para cada $k \in \mathbb{N}$ (esto es, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in [A_k, B_k]$ para cada $n \geq n_k$) y $(B_k - A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Así, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ resultará de Cauchy dado que las colas están contenidas en intervalos $[A_k, B_k]$ de longitud cada vez más chica.

Para esto, con una estrategia similar a la del método de bisección, consideramos el punto medio $C_0 := (A_0 + B_0)/2$ del intervalo $[A_0, B_0]$, y analizamos cómo refinar $[A_0, B_0]$, tratando de preservar la propiedad de que contenga una cola de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. El siguiente intervalo $[A_1, B_1]$ se define como $[A_0, C_0]$ si C_0 es una cota superior para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $[C_0, B_0]$ en caso contrario. De esta manera, tenemos que A_1 no es una cota superior para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y B_1 sí lo es. Dado que A_1 no es una cota superior del conjunto de los términos a_n, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A_1 \leq a_{n_1}$ y en consecuencia, $A_1 \leq a_n \leq B_1$ para todo $n \geq n_1$.

Prosiguiendo de esta manera, obtenemos una sucesión de intervalos encajados

$$[A_0, B_0] \supset [A_1, B_1] \supset \cdots$$

cuyo longitud tiende a cero, en donde el extremo izquierdo A_k no es cota superior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, el extremo derecho B_k sí lo es, y por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $A_k \leq a_n \leq B_k$ para $n \geq n_k$.

Demostramos ahora que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_k - A_k < \varepsilon$. Entonces existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $A_k \leq a_n \leq B_k$ para $n \geq n_k$. En consecuencia, $|a_n - a_m| \leq B_k - A_k$ para cada $n, m \geq n_k$. □

6.3.2. Una tercera hipótesis de completitud

Tenemos entonces que cada sucesión monótona y acotada es de Cauchy. En consecuencia, si, de acuerdo a la Hipótesis 1 de completitud, las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{R}$ convergen en $\mathbb{R}$, lo mismo podría decirse de las sucesiones monótonas y acotadas. Vamos a dejar registrada también esta nueva condición de completitud.

Hipótesis 3 (Completitud con sucesiones monótonas y acotadas). *Toda sucesión monótona y acotada de $\mathbb{R}$ converge en $\mathbb{R}$.*

Ejercicio 6.3.8. *Sea $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos encajados de $\mathbb{R}$.*

1. *Suponiendo válida la Hipótesis 3 de completitud, demostrar que las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a valores α y β respectivamente, tales que $\alpha \leq \beta$.*
2. *Demostrar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = [\alpha, \beta]$.*

Ejercicio 6.3.9. *¿Es la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del Ejercicio 6.3.4 convergente?*

6.3.3. El número e

Frecuentemente en matemática se ha apelado a sucesiones monótonas y acotadas para construir números irracionales. Un ejemplo clásico es el del número e, que discutimos a continuación.

Consideremos la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de término general $s_n := 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. De su definición concluimos inmediatamente que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Asimismo, esta sucesión está acotada superiormente por 3: dado que $(n+1)! \geq 2^n$ para todo $n \geq 0$, resulta

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Tabla 6.1.: La sucesión $(s_n)_{n>0}$, $s_n := 1 + 1/1! + \cdots + 1/n!$.

n	s_n	n	s_n
1	2.000000000	7	2.718253969
2	2.500000000	8	2.718278771
3	2.666666667	9	2.718281527
4	2.708333334	10	2.718281803
5	2.716666667	11	2.718281828
6	2.718055556	12	2.718281828

Por lo tanto, teniendo en cuenta que cada sucesión monótona y acotada es de Cauchy (Teorema 6.3.7), deducimos que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y por ende, converge a un número real (Lema 6.1.1), que denominamos e.

Es interesante notar que los términos s_n definidos previamente permiten estimar e con gran precisión. En efecto, si $n > m$, tenemos que

$$\begin{aligned} s_n &= s_m + \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &= s_m + \frac{1}{(m+1)!}\left(1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \cdots + \frac{1}{(m+2)\cdots(n-1)n}\right) \\ &\leq s_m + \frac{1}{(m+1)!}\left(1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(m+1)^{n-m-1}}\right) \\ &\leq s_m + \frac{1}{(m+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{m+1}} = s_m + \frac{1}{m}\,\frac{1}{m!}, \end{aligned}$$

es decir, tenemos la estimación

$$s_m < s_{m+1} \leq s_n \leq s_m + \frac{1}{m}\,\frac{1}{m!}.$$

Dado que estas desigualdades son válidas para cada $n > m$, del principio de conservación del número (Lema 3.1.40) deducimos que

$$s_m < e \leq s_m + \frac{1}{m}\,\frac{1}{m!}. \tag{6.2}$$

En la Tabla 6.1 listamos los primeros 11 términos de la sucesión $(s_n)_{n>0}$ redondeados a 9 dígitos decimales. Cabe destacar que el desarrollo decimal de s_{11} coincide con el del número e en sus primeros 9 dígitos decimales.

El número e es irracional.

Una consecuencia interesante de (6.2) es que permite demostrar que e es irracional. En efecto, si e fuera un número racional, correspondería a una fracción p/q, donde p y q son números naturales. Más aún, debe ser necesariamente $q \geq 2$, dado que e no es un número natural ya que tenemos que

$2 < e < 3$. Aplicando (6.2) con $m = q$, obtenemos

$$s_q < \frac{p}{q} \leq s_q + \frac{1}{q}\frac{1}{q!},$$

de lo cual, multiplicando por $q!$, concluimos que

$$q!\,s_q < p\,(q-1)! \leq q!\,s_q + \frac{1}{q} < q!\,s_q + 1.$$

Dado que $q!\,s_q = q! + q! + q!/2! + \cdots + q!/q!$ es un número natural, vemos que el número natural $p\,(q-1)!$ está situado entre dos naturales consecutivos, lo cual no es posible. En consecuencia, no existe ninguna fracción que represente al número e, o, en otras palabras, e **es un número real irracional.**

El número e a partir de la sucesión $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Otra forma en que habitualmente se define el número e es a partir de la sucesión $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aplicando la fórmula del binomio de Newton (Lema 0.2.4), tenemos

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\ &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n}\\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (6.3)\end{aligned}$$

De la última igualdad concluimos inmediatamente que $(1+1/n)^n \leq s_n < 3$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Asimismo, vemos que $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, dado que el $(n+1)$–ésimo término $(1+1/(n+1))^{n+1}$ se obtiene a partir de $(1+1/n)^n$ reemplazando cada factor de la forma $1-k/n$ en (6.3) por $1-k/(n+1)$, que es mayor, y agregando un sumando positivo. Más precisamente, de acuerdo con (6.3), tenemos que

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\\ &> 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\ &> 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

Dado que $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente, resulta una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ (Teorema 6.3.7), y por ende, converge en $\mathbb{R}$ (Lema 6.1.1).

Lema 6.3.10. *Las sucesiones $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo número real.*

Demostración. De (6.3) hemos concluido que $(1+1/n)^n \leq s_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Por otro lado,

afirmamos que

$$s_n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{3}{2n} \tag{6.4}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. La comprobación de (6.4) en los casos $n = 1,2$ se obtiene directamente comparando los valores de s_n y $(1+1/n)^n$, que listamos en las Tablas 6.1 y 6.2 respectivamente. Para los restantes valores de n, razonamos de la siguiente manera.

De acuerdo con (6.3), tenemos que

$$\begin{aligned} s_n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \frac{1}{2!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Afirmamos que, si $2 \leq k \leq n$, entonces

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{k(k-1)}{2n}. \tag{6.6}$$

En efecto, argumentando de forma inductiva, si $k = 2$, entonces tenemos que

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} = \frac{2\cdot(2-1)}{2n},$$

lo que prueba (6.6) en tal caso. Suponiendo ahora que se satisface (6.6) para cierto valor de k con $2 \leq k \leq n-1$, analizamos si (6.6) es cierta para $k+1$. Para esto, vemos que

$$\begin{aligned} 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right) &= 1-\frac{k}{n}-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right)+\frac{k}{n} \\ &= \left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)+\frac{k}{n} \\ &\leq \left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{k(k-1)}{2n}+\frac{k}{n}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de la validez de (6.6) para k. Dado que

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{k(k-1)}{2n}+\frac{k}{n} \leq \frac{k(k-1)}{2n}+\frac{k}{n} = \frac{k}{n}\left(\frac{k-1}{2}+1\right) = \frac{k(k+1)}{2n},$$

vemos que se satisface (6.6) para $k+1$, lo que prueba su validez en general.

Combinando (6.5) y (6.6) deducimos que

$$s_n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\frac{k(k-1)}{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!} < \frac{3}{2n}.$$

Esto muestra que (6.4) es válida para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, tenemos que

$$0 \leq s_n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{2n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde deducimos inmediatamente que $\left(s_n - (1+1/n)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Las

Tabla 6.2.: La sucesión $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

n	$(1+1/n)^n$	n	$(1+1/n)^n$
1	2.00000000000	7	2.54649969704
2	2.25000000000	8	2.56578451395
3	2.37037037037	9	2.58117479171
4	2.44140625000	10	2.59374246010
5	2.48832000000	11	2.60419901190
6	2.52162637174	12	2.61303529022

propiedades aritméticas de los límites (Teorema 3.1.27) muestran que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo número real. □

En la Tabla 6.2 listamos los primeros 12 términos de la sucesión $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ redondeados a 9 dígitos decimales. Es interesante observar que la convergencia de esta sucesión al número e es mucho más lenta que la de la sucesión $(s_n)_{n>0}$ de la sección precedente (comparar con la Tabla 6.1).

Ejercicio 6.3.11. *Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $b_n := (1+1/n)^{n+1}$.*

1. *Demostrar que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente.* (Sugerencia: observar que $b_n \geq b_{n+1}$ si y solo si $\big((n+1)^2/n(n+2)\big)^{n+1} \geq (n+2)/(n+1)$ y analizar los primeros términos del desarrollo del binomio de Newton de $\big((n+1)^2/n(n+2)\big)^{n+1}$.)
2. *Demostrar que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente.*
3. *Demostrar que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ define el mismo desarrollo decimal que $((1+1/n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

6.4. La completitud de $\mathbb{R}$

Un cuerpo ordenado en el cual se satisface alguna de las tres hipótesis de completitud se denomina un **cuerpo ordenado completo**. De acuerdo a nuestra discusión previa, las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{Q}$ convergen en $\mathbb{R}$, y por lo tanto, la intersección de cualquier sucesión de intervalos cerrados y encajados con extremos **racionales** cuya longitud tiende a 0 consiste de un punto real, y toda sucesión monótona y acotada de $\mathbb{Q}$ converge en $\mathbb{R}$. Como vamos a ver más adelante, cuando retomemos el estudio de la estructura de cuerpo ordenado de $\mathbb{R}$ (Sección 9.1), esto implica que toda sucesión de Cauchy de números reales converge en $\mathbb{R}$, es decir, se satisface la Hipótesis 1 de completitud. En consecuencia, argumentando como en la sección sobre encaje de intervalos (Sección 6.2) y la sección sobre sucesiones monótonas y acotadas (Sección 6.3), vamos a concluir que también se satisfacen las Hipótesis 2 y 3 de completitud en $\mathbb{R}$. En resumen, tenemos la siguiente **definición preliminar**, que vamos a reconsiderar en el Capítulo 9.

Definición 6.4.1 (Definición preliminar del cuerpo ordenado de los números reales)**.** *El conjunto de los desarrollos decimales infinitos admisibles, con las operaciones aritméticas y el orden de las*

Definiciones 5.2.2 y 5.3.4, es lo que denominamos el **cuerpo ordenado completo de los números reales**.

6.4.1. El número π

Otro número "famoso" en la matemática es el número π, que podemos definir como **la mitad de la longitud de la circunferencia de radio 1** o **el área del círculo de radio 1** (admitiendo sin discusión que dicha longitud y dicha área puedan medirse). Cabe destacar que la denominación π proviene, de hecho, de la primera letra griega en la palabra "perímetro".

Si bien se conocían aproximaciones a π desde los tiempos de los egipcios y babilonios, el primer tratamiento sistemático de π se debe a Arquímedes, e involucra implícitamente la completitud de los números reales. La idea de Arquímedes se basaba en aproximar la longitud de la circunferencia de diámetro 1 por el perímetro de polígonos regulares inscriptos y circunscriptos a dicha circunferencia con una cantidad creciente de lados. Aquí discutimos una variante simple del método de Arquímedes.

El número π por medio de longitudes

La idea es aproximar a 2π, la longitud de la circunferencia de radio 1, a partir del perímetro de polígonos regulares inscriptos en la circunferencia de radio 1 con 2^n lados. Más precisamente, denotemos por ℓ_n y $\pi_n = 2^n \ell_n$ a la longitud del lado y al perímetro del polígono regular $\mathscr{P}_n$ de 2^n lados inscripto en la circunferencia de radio 1 para cada $n \in \mathbb{N}$, que suponemos bien definidos.

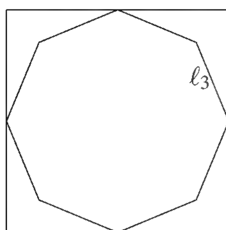


Figura 6.1.: El polígono $\mathscr{P}_3$ y el cuadrado circunscripto a la circunferencia.

Un argumento geométrico (que puede verse, por ejemplo, en [CRS96, página 124]) muestra que $\ell_2 := \sqrt{2}$ y

$$\ell_n^2 = \ell_{n+1}^2(4 - \ell_{n+1}^2)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Deducimos inmediatamente que $\pi_2 := 4\sqrt{2}$ y

$$\pi_n^2 = \pi_{n+1}^2 - \frac{\pi_{n+1}^4}{2^{2n+4}}, \text{ o equivalentemente, } \pi_{n+1}^2 = \pi_n^2 + \frac{\pi_{n+1}^4}{2^{2n+4}} \tag{6.7}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como vamos a ver, (6.7) define una sucesión de números reales positivos convergente cuyo límite es lo que definimos como 2π, es decir, definimos π como el límite de la sucesión $(\pi_n/2)_{n\in\mathbb{N}}$.

Tabla 6.3.: La sucesión $(\pi_n/2)_{n>0}$.

n	$\pi_n/2$	n	$\pi_n/2$
2	2.828427124	6	3.140331213
3	3.061467457	7	3.141277519
4	3.121445153	8	3.141514825
5	3.136548483	9	3.141569585

Para esto, observamos que $\pi_{n+1}^2 - \pi_n^2 = \pi_{n+1}^4/2^{2n+4}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde concluimos que, dado que π_n es positivo para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **creciente**.

Por otro lado, se trata de una sucesión **acotada**, dado que $\pi_n \leq 8$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto, el polígono regular de 2^n lados inscripto en la circunferencia de radio 1 es convexo, y por lo tanto su perímetro es menor o igual que el del cuadrado circunscripto a dicha circunferencia (ver la Figura 6.1). Dado que el perímetro de este cuadrado es 8, concluimos que $\pi_n \leq 8$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

En conclusión, la sucesión $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ resulta creciente y acotada, por lo que existe su límite, que definimos como 2π.

Lema 6.4.2. *La sucesión $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida de acuerdo a (6.7) converge en $\mathbb{R}$ a un número positivo que denominamos 2π.*

Ejercicio 6.4.3. *Sea $r > 0$ un número real y $\mathscr{P}_n^{(r)}$ el polígono regular de 2^n lados inscripto en la circunferencia de radio r para cada $n \in \mathbb{N}$. Si denominamos por $\ell_n^{(r)}$ y $\pi_n^{(r)}$ a la longitud del lado y el perímetro de $\mathscr{P}_n^{(r)}$ respectivamente, demostrar que $\ell_n^{(r)} = r\ell_n^{(1)}$ y $\pi_n^{(r)} = r\pi_n^{(1)}$. Concluir que la longitud de la circunferencia de radio r es $2\pi r$.*

En la Tabla 6.3 listamos el desarrollo decimal de los primeros 10 términos de la sucesión $(\pi_n/2)_{n>2}$ redondeados a 9 dígitos decimales. Observamos que el término $\pi_n/2$ coincide en sus primeros 4 decimales con el desarrollo decimal de $\pi = 3{,}14159265\ldots$

El número π por medio de superficies

Otra posibilidad es interpretar a π como el área del círculo de radio 1, aproximándolo por medio del área del polígono regular $\mathscr{P}_n$ inscripto en la circunferencia de radio 1 con 2^n lados (que suponemos que está bien definida para cada $n \in \mathbb{N}$).

Si α_n es el área del polígono regular $\mathscr{P}_n$, mediante argumentos elementales de geometría obtenemos la siguiente relación (cuya deducción puede verse, por ejemplo, en [CJ99, página 103]):

$$\alpha_2 := 2, \ \left(1 - 2^{1-2n}\alpha_{n+1}^2\right)^2 = 1 - 2^{2-2n}\alpha_n^2 \ \ (n \geq 2). \tag{6.8}$$

De la propia definición de α_n se deducen cotas superiores e inferiores de α_n para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto, cada polígono $\mathscr{P}_n$ se encuentra inscripto en la circunferencia de radio 1, y por lo tanto, contenido en el cuadrado circunscripto a la circunferencia de radio 1 (ver la Figura 6.1). De esto deducimos que el área α_n de $\mathscr{P}_n$ es menor o igual que la de dicho cuadrado, esto es, 4. A su vez,

por la definición de área vemos que $\alpha_n \geq 0$, de lo que concluimos que

$$0 \leq \alpha_n \leq 4 \tag{6.9}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, tenemos que la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ resulta **acotada**.

Por otro lado, es fácil ver que la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **creciente**, ya que $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De la Hipótesis 3 completitud de $\mathbb{R}$ deducimos el siguiente resultado.

Lema 6.4.4. *La sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_{>0}$ definida por (6.8) converge a un número real positivo, que denominamos ϕ.*

Ejercicio 6.4.5. *Sea $r > 0$ un número real y $\mathscr{P}_n^{(r)}$ el polígono regular de 2^n lados inscripto en la circunferencia de radio r para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $\alpha_n^{(r)}$ es el área de $\mathscr{P}_n^{(r)}$, demostrar que $\alpha_n^{(r)} = r^2\alpha_n^{(1)}$. Concluir que el área del círculo de radio r es ϕr^2.*

La comparación entre ambas definiciones

Por último, comparamos el límite de esta sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con el de la sucesión $(\pi_n/2)_{n\in\mathbb{N}}$ de la sección anterior. Observamos que π_n es el perímetro del polígono regular $\mathscr{P}_n$ de 2^n lados inscripto en la circunferencia de radio 1, en tanto de α_n es el área de $\mathscr{P}_n$. A fin de relacionar ambas cantidades, apelamos nuevamente a la geometría elemental: si a_n es la apotema de $\mathscr{P}_n$, es decir, la distancia entre el centro de $\mathscr{P}_n$ y cualquiera de sus lados (ver la Figura 6.2), se satisface la siguiente identidad:

$$\alpha_n = \frac{\pi_n \cdot a_n}{2}.$$

En particular, tenemos que $a_n = 2\alpha_n/\pi_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde, por las propiedades aritméticas de los límites, concluimos que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ϕ/π.

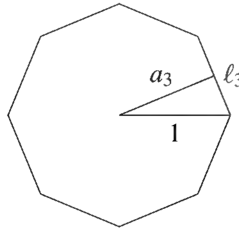


Figura 6.2.: El polígono $\mathscr{P}_3$ y su apotema a_3.

Por otro lado, si β_n es el ángulo que definen la altura (con respecto al lado de $\mathscr{P}_n$) de cada uno de los 2^n triángulos de $\mathscr{P}_n$ con cualquiera de los correspondientes segmentos que coinciden en el centro, es fácil ver que

$$a_n = \cos(\beta_n) \text{ y } a_{n+1} = \cos(\beta_{n+1}) = \cos(\beta_n/2) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando argumentos trigonométricos, tenemos que

$$a_n = \cos(\beta_n) = \cos^2(\beta_n/2) - \operatorname{sen}^2(\beta_n/2) = 2\cos^2(\beta_n/2) - 1 = 2a_{n+1}^2 - 1.$$

Sea $L := \phi/\pi = \lim_{n\to\infty} a_n$. Por las propiedades aritméticas de los límites y la identidad precedente, tenemos que

$$L = 2L^2 - 1.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $L = 1$ y $L = -1/2$. Ahora bien, teniendo en cuenta que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de reales positivos, concluimos que $L = \phi/\pi = 1$. En consecuencia, ambas definiciones de π coinciden, de donde concluimos que podemos definir **el número π**, en un sentido límite, tanto como **el perímetro de la circunferencia de diámetro 1** como **el área del círculo de radio 1**.

Teorema 6.4.6 (Definición de π). *Las sucesiones $(\pi_n/2)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (6.7) y (6.8) convergen al mismo número real positivo, que denominamos π.*

Ejercicio 6.4.7. *Calcular aproximadamente los primeros términos de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

7. Ecuaciones polinomiales

Tenemos un dominio en el cual resolver nuestros problemas modelo, el cuerpo ordenado completo de los números reales, aunque solo hayamos expresado la completitud en la forma de "hipótesis". Dado que la ecuación $x^2 = 2$ (o el problema de minimización $\text{mín}_{x>0}(x^3 - 6x)$, o el problema de equilibrio $x/2 + 1/x = x$) que hemos discutido hasta el momento es sumamente sencilla, cabe preguntarse si las herramientas que hemos desarrollado nos permiten estudiar clases de problemas más generales. En este capítulo vamos a considerar una clase de ecuaciones mucho más amplia: las ecuaciones polinomiales reales. Vamos a comenzar con una "subclase" particular, la de las ecuaciones del tipo $x^n = a$ con $a > 0$, que nos va a conducir a la demostración de la existencia de las raíces enésimas reales de los reales positivos y a establecer sus propiedades más importantes. Posteriormente vamos a considerar ecuaciones polinomiales reales generales, comenzando por establecer resultados de existencia y "regiones" de búsqueda de soluciones. Finalmente, vamos a discutir cómo aplicar los dos métodos que hemos considerado hasta el momento, el de bisección y el de Newton, a ecuaciones polinomiales.

7.1. Raíces enésimas

Una clase particular de ecuaciones, aunque sumamente importante, es la de las ecuaciones de la forma

$$x^n - a = 0, \tag{7.1}$$

donde n es un número natural mayor que 1 y a es un número real positivo. El objetivo de esta sección es analizar la solubilidad (existencia y unicidad) de tal ecuación, y a la vez, desarrollar herramientas **efectivas** para su solución.

Con un argumento similar al empleado para el caso $n = 2$ en la Sección 2.1 podemos deducir que (7.1) tiene a lo sumo una solución real positiva, como pedimos probar en el ejercicio a continuación.

Ejercicio 7.1.1. *Demostrar que (7.1) tiene a lo sumo una solución real positiva.*

Por otro lado, la cuestión de la existencia de soluciones es un problema más delicado, cuya respuesta es afirmativa gracias a la **completitud** de $\mathbb{R}$. De hecho, es posible demostrar que pueden obtenerse aproximaciones arbitrariamente precisas de (7.1) mediante el método de bisección, y por ende, una solución real positiva de (7.1), como discutimos a continuación.

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^n - a$. Es fácil ver $f(0) < 0 < f(a+1)$ (¡comprobarlo!). Llamamos $a_0 := 0$, $b_0 := a+1$ e $I_0 := [a_0, b_0]$. Si $c_0 := (a_0 + b_0)/2$, definimos el intervalo I_1 como $I_1 := [a_0, c_0]$ si $f(c_0) > 0$, y como $I_1 := [c_0, b_0]$ si $f(c_0) < 0$, es decir, como la

mitad izquierda o derecha I_0 donde f cambia de signo. Por último, si $f(c_0) = c_0^n - a = 0$, hemos conseguido la raíz enésima de a que buscábamos, por lo que detenemos el proceso.

Suponiendo que $f(c_0) \neq 0$, denominamos a_1 y b_1 a los extremos izquierdo y derecho de I_1 respectivamente, es decir, $I_1 := [a_1, b_1]$, definimos $c_1 := (a_1 + b_1)/2$ y determinamos la mitad izquierda o derecha I_2 de I_1 en la cual f cambia de signo (siempre que $f(c_1) \neq 0$). Así sucesivamente, suponiendo que en ningún momento del proceso obtenemos la raíz enésima positiva de a como el punto medio de alguno de los intervalos determinados, obtenemos una sucesión $(I_k)_{k>0}$ de intervalos cerrados, acotados y encajados ($I_k \supset I_{k+1}$ para cada $k \geq 0$) con las siguientes propiedades: si $I_k := [a_k, b_k]$, entonces

- $f(a_k) < 0 < f(b_k)$ para cada $k \geq 0$,
- $b_k - a_k = (b_0 - a_0)/2^k$ para cada $k \geq 0$.

La estrategia que determina la sucesión de intervalos $(I_k)_{k\geq 0}$, comenzando con el intervalo $I_0 := [a_0, b_0]$ definido previamente, se denomina el **método de bisección**. El objetivo del ejercicio a continuación es discutir las propiedades que satisface esta sucesión de intervalos.

Ejercicio 7.1.2 (La solución de (7.1) por el método de bisección). *Sean $(a_k)_{k>0}$ y $(b_k)_{k>0}$ las sucesiones que define el método de bisección precedente.*

1. *Demostrar que $(a_k)_{k>0}$ y $(b_k)_{k>0}$ son de Cauchy, y por lo tanto, convergen en $\mathbb{R}$.*
2. *Sea $\alpha := \lim_{k\to\infty} a_k$ y $\beta := \lim_{k\to\infty} b_k$. Demostrar que $\alpha = \beta \geq 0$.*
3. *Si $c_k := (a_k + b_k)/2$ es el punto medio del intervalo I_k para cada $k \geq 0$, demostrar que la sucesión $(c_k)_{k>0}$ converge a α.*
4. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) := x^n - a$. Demostrar que la sucesión $(f(c_k))_{k>0}$ converge a $0 = \alpha^n - a$. Concluir que α es la solución de (7.1).*

Como consecuencia de los dos ejercicios precedentes, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.1.3 (Existencia y unicidad de la raíz enésima). *Para cada número real $a > 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe una única solución positiva de la ecuación $x^n = a$, que denominamos la* **raíz n-ésima de** *a y representamos por el símbolo $\sqrt[n]{a}$.*

Las raíces enésimas con el método de Newton

Como hemos visto en la Sección 2.2 a propósito de la solución de la ecuación $x^2 = 2$, el método de Newton puede proveer una herramienta mucho más eficiente que el método de bisección. El objetivo de esta sección es analizar la aplicabilidad del método de Newton a fin de resolver la ecuación $x^n - a = 0$.

Sea $n \geq 2$ y $a > 0$. Argumentamos como en la Sección 2.2. Supongamos que tenemos una "buena" aproximación $a_0 > 0$ de la solución positiva α de la ecuación $x^n - a = 0$ (que sabemos

que existe por el Teorema 7.1.3). Así, es de esperar que $e_0 := \alpha - a_0$ sea "mucho menor" que a_0. En consecuencia, aplicando la fórmula del binomio de Newton (Lema 0.2.4), tenemos que

$$a = \alpha^n = (a_0 + e_0)^n = a_0^n + na_0^{n-1}e_0 + \binom{n}{2}a_0^{n-2}e_0^2 + \cdots + e_0^n.$$

Si "despreciamos" los términos de orden al menos cuadrático en e_0, los cuales deberían ser "mucho menores" en valor absoluto que a_0 y e_0, entonces tenemos la aproximación

$$a \approx a_0^n + na_0^{n-1}e_0, \text{ o equivalentemente, } e_0 \approx \frac{a - a_0^n}{na_0^{n-1}}.$$

Así, concluimos que $a_1 := a_0 + (a - a_0^n)/na_0^{n-1}$ debería ser una "mejor aproximación" de α que a_0. Prosiguiendo el argumento de esta manera, obtenemos la siguiente sucesión $(a_k)_{k>0}$, que se denomina la **sucesión del método de Newton**, comenzando en $a_0 > 0$:

$$a_{k+1} := a_k + \frac{a - a_k^n}{na_k^{n-1}}. \tag{7.2}$$

Ejercicio 7.1.4 (La solución de (7.1) por el método de Newton). *Sea $n \geq 2$ y $a > 0$.*

- *Suponiendo que $a_0 > 0$ y $a_0^n > a$, demostrar que $0 < a_1 < a_0$ y $a_1^n > a$.* (Sugerencia: aplicar la desigualdad de Bernoulli $(1+x)^n > 1 + nx$, siendo $x > -1$.)
- *Concluir que, si $a_0 > 0$ y $a_0^n > a$, la sucesión la sucesión $(a_k)_{k>0}$ de (7.2) está bien definida y converge a la solución positiva de $x^n - a = 0$.*

Ejercicio 7.1.5 (Errores en la solución de (7.1) por el método de Newton). *Sea $\alpha := \sqrt[n]{a}$, $(a_k)_{k\geq 0}$ la sucesión definida por (7.2) y $e_k := \alpha - a_k$ para cada $k \geq 0$.*

- *Demostrar que $e_{k+1} = e_k + \dfrac{a_k^n - a}{na_k^{n-1}}$ para cada $k \geq 0$.*
- *Demostrar que $e_{k+1} = -(na_k^n)^{-1}e_k^2\big(\binom{n}{2}a_k^{n-1} + \binom{n}{3}a_k^{n-2}e_k + \cdots + \binom{n}{n}a_k e_k^{n-2}\big)$.* (Sugerencia: observar que $a = (a_k + e_k)^n$ y aplicar la fórmula del binomio de Newton (Lema 0.2.4).)
- *Demostrar que si $a_0 > 0$ y $a_0^n > a$, entonces existe $M := M(a_0, n) > 0$ tal que $|e_{k+1}| \leq M|e_k|^2$ para cada $k \in \mathbb{N}$.*

7.1.1. La exponencial racional

Como es bien sabido, dado un número real estrictamente positivo a, la raíz n–ésima de a también se expresa en la forma $a^{1/n}$, notación que refiere a las identidades

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m, \quad a^{n\cdot m} = (a^n)^m, \tag{7.3}$$

válidas para cada par de exponentes enteros n y m. En efecto, subyace a la propia notación la idea de que $(a^{1/n})^n = a$, "debido" a que $a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a$. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que, en principio, la notación $a^{1/n}$ para la raíz n–ésima de a es **puramente formal**, y el verdadero

motivo por el cual se satisface la identidad $(a^{1/n})^n = a$ es que, por definición, $a^{1/n}$ es la única raíz real positiva del polinomio $x^n - a$, de donde se sigue que $(a^{1/n})^n - a = 0$. El propósito de esta sección es observar que, a partir de la definición de raíz enésima que hemos dado, podemos obtener una noción de potencia con exponente racional que satisface las identidades (7.3), y que la operación resultante es de hecho una función continua sobre $\mathbb{R}_{>0}$ para cada $r \in \mathbb{Q}$.

Fijemos $a > 0$. Comenzamos extendiendo la notación $a^{1/n}$ a fracciones (de números enteros) generales, representando, nuevamente de manera formal, la raíz n–ésima de a^m por $a^{m/n}$. Sin embargo, esta "notación" podría no ser consistente, dado que cada número racional r se representa mediante infinitas fracciones m/n. Dado que buscamos una definición de a^r que **dependa solo del exponente racional r y no de la fracción m/n que lo representa**, es necesario probar que nuestra notación previa no depende de la fracción en consideración. Éste es el contenido del siguiente resultado.

Lema 7.1.6. *Sean $m, p \in \mathbb{Z}$ y $n, q \in \mathbb{N}$ tales que $m/n = p/q$. Entonces $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$.*

Demostración. Por el momento, las "únicas" propiedades matemáticas que conocemos de las raíces enésimas es lo que hemos demostrado en el Teorema 7.1.3: su existencia y unicidad. Mediante la existencia de las raíces enésimas hemos "definido" los símbolos $a^{m/n}$ y $a^{p/q}$. Nuestra intención es ahora utilizar la unicidad de las mismas a fin de demostrar que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$ si $m/n = p/q$. Para esto, basta ver que tanto $\sqrt[n]{a^m}$ como $\sqrt[q]{a^p}$ resultan de hecho la raíz (nq)–ésima de $a^{mq} = a^{np}$ (esta última igualdad es consecuencia de la identidad $mq = np$).

Veamos que $\sqrt[n]{a^m}$ es la raíz (nq)–ésima de a^{mq}. En efecto, por la definición de $\sqrt[n]{a^m}$ tenemos que $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$, de donde concluimos que, debido a (7.3), resulta

$$(\sqrt[n]{a^m})^{nq} = ((\sqrt[n]{a^m})^n)^q = (a^m)^q = a^{mq}.$$

En consecuencia, de la unicidad de las raíces enésimas deducimos que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}}$. De modo similar, vemos que $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq}}$, y por lo tanto, que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$, como queríamos demostrar. □

Tenemos entonces que nuestra notación $a^{m/n}$ para $\sqrt[n]{a^m}$ resulta consistente con la equivalencia entre fracciones, lo que nos permite establecer la siguiente definición.

Definición 7.1.7 (Potencia de exponente racional)**.** *Dado un número racional r y una fracción m/n que lo representa, definimos a^r por $a^r := \sqrt[n]{a^m}$.*

Propiedades de la exponencial racional

Hemos dicho que la notación $a^{1/n}$ para $\sqrt[n]{a}$ hacía implícitamente referencia a las identidades (7.3). En tal sentido, cabe preguntarse si nuestra definición de potencias exponente racional (Definición 7.1.7) satisface las correspondientes identidades para números racionales. La respuesta a esta pregunta es el contenido del siguiente enunciado.

Lema 7.1.8. *Sean r, s dos números racionales. Son válidas las identidades*

$$a^{r+s} = a^r \cdot a^s, \quad a^{r \cdot s} = (a^r)^s. \tag{7.4}$$

Demostración. Demostramos la identidad $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$, en tanto que la identidad $a^{r \cdot s} = (a^r)^s$ queda como ejercicio. Sean $m, p \in \mathbb{Z}$ y $n, q \in \mathbb{N}$ tales que $r = m/n$ y $s = p/q$. Tenemos que demostrar que $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$, es decir, que $a^r \cdot a^s$ es la raíz (nq)–ésima de a^{mq+np}. Para esto, por (7.3) tenemos que

$$(a^r \cdot a^s)^{nq} = (a^r)^{nq} \cdot (a^s)^{nq} = ((a^r)^n)^q \cdot ((a^s)^q)^n = (a^m)^q \cdot (a^p)^n = a^{mq+np}.$$

Esta igualdad, junto con la unicidad de la raíz enésima (Teorema 7.1.3), asegura que $a^r \cdot a^s = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{(mq+np)/nq} = a^{r+s}$ y concluye la demostración. □

Ejercicio 7.1.9. *Con las hipótesis del Lema 7.1.8, demostrar que* $a^{r \cdot s} = (a^r)^s$.

Ejercicio 7.1.10. *Sean* $a, b > 0$ *y* $r \in \mathbb{Q}$. *Demostrar las siguientes igualdades:*

- $(ab)^r = a^r \cdot b^r$.
- $a^{-r} = (a^r)^{-1} = (a^{-1})^r$.
- $(a/b)^r = a^r/b^r$.

Otra propiedad fundamental de la exponencial a^n para números enteros es la que afirma que a^n es creciente en n para $a > 1$ y decreciente para $a < 1$. Nuestro siguiente resultado asegura que lo mismo ocurre con exponentes racionales.

Lema 7.1.11 (Monotonía de la exponencial racional)**.** *Sean* $r < s$ *números racionales. Entonces*

$$a^r < a^s \text{ si } a > 1 \quad \text{y} \quad a^r > a^s \text{ si } 0 < a < 1. \tag{7.5}$$

Demostración. Supongamos el resultado cierto para $a > 1$. Entonces, la conclusión para $0 < a < 1$ se deduce inmediatamente del caso anterior, aplicando dicha conclusión a $1/a$. Por lo tanto, solo vamos a considerar el caso $a > 1$.

Demostrar que $a^r < a^s$ es equivalente a demostrar que $a^{s-r} > 1$, es decir, a demostrar que $a^h > 1$ para cada racional $h > 0$. Comenzamos observando que $a^{1/n} > 1$ para cada $n > 1$. En efecto, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^n - a$, entonces $f(1) = 1 - a < 0$ en tanto que $f(a) = a^n - a > 0$, lo que implica que la única raíz positiva $\sqrt[n]{a}$ de f satisface la condición $1 < \sqrt[n]{a}$. De esto se deduce inmediatamente que $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m > 1$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$, es decir, que $a^h > 1$ para cada racional positivo h. Esto concluye la demostración. □

Ejercicio 7.1.12. *Sean a y b números reales tales que* $0 < a < b$. *Demostrar que* $a^r < b^r$ *para cada racional positivo* r.

Ejercicio 7.1.13. *Sea* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión de* $\mathbb{Q}$ *tal que* $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$. *El objetivo del presente ejercicio es demostrar que* $\lim_{n \to \infty} (1 + a_n)^{a_n} = e$.

1. *Si* $a_n > 0$, *demostrar que* $(1 + \lfloor a_n \rfloor)^{\lfloor a_n \rfloor} \leq (1 + a_n)^{a_n} \leq (1 + \lceil a_n \rceil)^{\lceil a_n \rceil}$, *donde* $\lfloor a_n \rfloor$ *es la parte entera de* a_n *(es decir, el mayor entero que es menor o igual que* a_n*) y* $\lceil a_n \rceil$ *es el menor entero que es mayor o igual que* a_n.
2. *Demostrar que* $\lim_{n \to \infty} (1 + \lfloor a_n \rfloor)^{\lfloor a_n \rfloor} = e$ *y* $\lim_{n \to \infty} (1 + \lceil a_n \rceil)^{\lceil a_n \rceil} = e$.
3. *Concluir que* $\lim_{n \to \infty} (1 + a_n)^{a_n} = e$.

Continuidad de la potencia y la exponenciación racional

Para completar nuestra discusión sobre la exponencial racional, observamos que tanto la potencia como la exponenciación racionales resultan continuas, como vamos a demostrar. Comenzamos con el siguiente ejercicio, que nos va a permitir establecer la continuidad de la potencia racional.

Ejercicio 7.1.14. *Sean a,b números reales positivos y sea $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Demostrar la identidad $b-a = (\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\sum_{i=0}^{n-1} b^{i/n}a^{1-(i+1)/n}$.* (Sugerencia: reemplazar $y = \sqrt[n]{b}$ y $x = \sqrt[n]{a}$ en la identidad $y^n - x^n = (y-x)\sum_{i=0}^{n-1} y^i x^{n-1-i}$.)

2. *Demostrar que si $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathbb{R}_{>0}$ que converge a $\alpha > 0$, entonces la sucesión $(a_m^{1/n})_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha^{1/n}$.*

3. *Concluir que si $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathbb{R}_{>0}$ que converge a $\alpha > 0$ y r es un número racional, entonces la sucesión $(a_m^r)_{m\in\mathbb{N}}$ converge a α^r.*

Del Ejercicio 7.1.14 deducimos inmediatamente el siguiente enunciado:

Lema 7.1.15 (Continuidad de la potencia racional). *Sea r un número racional y $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) := x^r$. Entonces f es una función continua.*

También se satisface un principio de continuidad en el "exponente" (racional), que es clave a fin de extender la exponenciación a exponentes reales arbitrarios. Comenzamos con un caso bien particular de este fenómeno.

Lema 7.1.16. *Sea $a > 0$. Entonces la sucesión $(a^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1.*

Demostración. En primer lugar podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a > 1$, dado que si $0 < a < 1$, entonces $1/a > 1$, y por lo tanto, del hecho de que $((1/a)^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1 se deduce inmediatamente que $(a^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1.

Dado que $a > 1$, existe $\lambda > 0$ tal que $a = 1+\lambda$. Por la desigualdad de Bernoulli (Lema 0.2.2) tenemos que $(1+\lambda/n)^n > 1+\lambda = a$, en tanto que $1^n = 1 < a$. En consecuencia, resulta $1 < \sqrt[n]{a} < 1+\lambda/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde, por la propiedad sandwich (Lema 3.1.35), concluimos que $(a^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1. □

El siguiente paso es extender este resultado a sucesiones que convergen a 0.

Ejercicio 7.1.17. *Sea $a > 0$ y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{Q}$ que converge a 0. Demostrar que $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1.* (Sugerencia: dado $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a^{1/n_0}-1| < \varepsilon$ y $|a^{-1/n_0}-1| < \varepsilon$, elegir $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|r_m| < 1/n_0$ para cada $m \geq m_0$.)

Por último, podemos extender la conclusión del ejercicio precedente al caso de sucesiones arbitrarias.

Lema 7.1.18 (Continuidad de la exponenciación racional). *Sea $a > 0$ y $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) := a^x$. Entonces f es una función continua.*

Demostración. Sea $r \in \mathbb{Q}$ y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{Q}$ que converge a r. Queremos demostrar que $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a^r.

Analizamos la diferencia $|a^{r_n} - a^r|$. Por (7.4), tenemos que $|a^{r_n} - a^r| = a^r\,|a^{r_n-r} - 1|$, lo cual reduce el problema al caso del Ejercicio 7.1.17, dado que la sucesión $(r_n - r)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Así, dado $\varepsilon > 0$, el Ejercicio 7.1.17 asegura que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a^{r_n-r} - 1| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. En consecuencia, $|a^{r_n} - a^r| = a^r\,\varepsilon$ para cada $n \geq n_0$, lo que demuestra que $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a^r. □

7.1.2. El criterio de la raíz enésima

En el Ejercicio 3.1.15 hemos discutido un criterio importante para establecer la convergencia a 0 de ciertas sucesiones, el criterio del cociente o de D'Alembert. Otro criterio importante es el denominado **criterio de la raíz enésima o de Cauchy**, que discutimos brevemente en esta sección.

Lema 7.1.19 (Criterio de la raíz enésima). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales que satisface la siguiente condición: existen $0 \leq \ell < 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \ell$ para cada $n \geq n_0$. Entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Demostración. Procediendo de modo similar que con el criterio del cociente, vamos a comparar la sucesión $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ con la exponencial $(\ell^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dado que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \ell$ para cada $n \geq n_0$, tenemos que $0 \leq |a_n| \leq \ell^n$ para cada $n \geq n_0$. En consecuencia, por la propiedad sandwich (Lema 3.1.35) concluimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. □

Ejercicio 7.1.20. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{R}$.*

1. *Si existen $\ell > 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \ell$ para cada $n \geq n_0$, demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite infinito.*

2. *¿Se puede decir algo del límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$?*

Los criterios del cociente y de la raíz enésima resultan similares dado que ambos comparten una característica fundamental: se trata de criterios que se obtienen por **comparación con sucesiones geométricas**. En efecto, el criterio del cociente es aplicable si la sucesión en consideración tiene un crecimiento acotado por el de una sucesión geométrica $(\ell^n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $0 < \ell < 1$, siendo este crecimiento medido por medio del cociente $|a_{n+1}|/|a_n|$. Análogamente, en el criterio de la raíz enésima el crecimiento de la sucesión se mide por medio de la raíz enésima $\sqrt[n]{|a_n|}$. En tal sentido, cabe preguntarse cómo se comparan ambos criterios. En el siguiente resultado concluimos que el **criterio de la raíz enésima es más "potente" que el del cociente**, en el sentido de que es aplicable a más situaciones que el del cociente.

Lema 7.1.21 ("D'Alembert implica Cauchy"). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = \ell$. Entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ para $\ell \geq 0$ o $\ell = \infty$.*

Demostración. Analizamos en primer lugar el caso $\ell > 0$.

Dado $0 < \varepsilon < \ell/2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $-\varepsilon \leq |a_{n+1}|/|a_n| - \ell \leq \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$. En consecuencia, $0 < \ell - \varepsilon \leq |a_{n+1}|/|a_n| \leq \ell + \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$ y por lo tanto,

$$(\ell-\varepsilon)^{n-n_0} \leq \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdots \frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} = \frac{|a_n|}{|a_{n_0}|} \leq (\ell+\varepsilon)^{n-n_0} \tag{7.6}$$

para cada $n \geq n_0$. Tomando raíces n–ésimas en la expresión anterior, concluimos que

$$\left(|a_{n_0}|(\ell-\varepsilon)^{-n_0}\right)^{1/n}(\ell-\varepsilon) \leq |a_n|^{1/n} \leq \left(|a_{n_0}|(\ell+\varepsilon)^{-n_0}\right)^{1/n}(\ell+\varepsilon). \tag{7.7}$$

Dado que la sucesión $\left((|a_{n_0}|(\ell\pm\varepsilon)^{-n_0})^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1 (Lema 7.1.16), existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq m_0$, entonces valen las condiciones

- $(\ell-2\varepsilon) \leq (|a_{n_0}|(\ell-\varepsilon)^{-n_0})^{1/n}(\ell-\varepsilon)$,
- $(|a_{n_0}|(\ell+\varepsilon)^{-n_0})^{1/n}(\ell+\varepsilon) \leq (\ell+2\varepsilon)$.

Combinando estas estimaciones con (7.7) concluimos que, para cada $n \geq \text{máx}\{n_0, m_0\}$, resulta $\ell - 2\varepsilon \leq |a_n|^{1/n} \leq \ell + 2\varepsilon$. Esto demuestra que $\text{lím}_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \ell$.

Por otro lado, la demostración del caso $\ell = 0$ resulta similar a la anterior, considerando solamente las desigualdades de la derecha en (7.6) y (7.7). Finalmente, el caso $\ell = \infty$ resulta una consecuencia inmediata del caso $\ell = 0$. □

Ejercicio 7.1.22. *Completar la demostración del Lema 7.1.21 para* $\ell = 0$ *y* $\ell = \infty$.

Ejercicio 7.1.23. *Aplicar el Lema 7.1.21 a fin de calcular los límites de las sucesiones* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cuyo término general se da a continuación:*

$$a_n := \sqrt[n]{n}, \qquad a_n := \sqrt[n]{n!}, \qquad a_n := \sqrt[n]{\tfrac{n+1}{n^2-2}}.$$

Ejercicio 7.1.24. *¿Vale la afirmación recíproca de "D'Alembert implica Cauchy"? Analizar la respuesta considerando la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definida por* $a_n := 2 + (-1)^n$.

Ejercicio 7.1.25 (Una estimación para $\sqrt[n]{n!}$). *En un ejercicio anterior se demostró que la sucesión* $(\sqrt[n]{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ *tiene límite infinito. Ahora bien, ¿de qué manera se "acerca" a infinito? Es decir, ¿crece de forma lineal, cuadrática, exponencial, etc.?*

Lo que haremos es **comparar** $(\sqrt[n]{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ *con una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* **orden de crecimiento** *conocido, de forma tal que* $\text{lím}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}/a_n$ *sea finito, lo que nos va a dar una estimación del orden de crecimiento de* $(\sqrt[n]{n!})_{n\in\mathbb{N}}$.

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *las sucesiones definidas por* $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ *y* $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. *Recordamos que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona creciente (Ejercicio 3.1.15 o Sección 6.3.3) y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona decreciente (Ejercicio 6.3.11).*

1. *Demostrar que* $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. (Sugerencia: demostrarlo por inducción, usando la monotonía de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)
2. *Concluir que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}/n = 1/e$.

Podemos parafrasear la conclusión del ejercicio precedente diciendo que la sucesión $(\sqrt[n]{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ se comporta **asintóticamente** como $\left(\frac{n}{e}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, lo cual, por supuesto, se refiere al comportamiento de ambas sucesiones **para valores grandes de** n. Por otro lado, de ninguna manera debiera concluirse que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{n!} = n/e$ para cada $n \geq n_0$. Solo hemos establecido que el cociente entre ambas cantidades tiene límite 1, lo cual en particular asegura que la sucesión $(\sqrt[n]{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un **comportamiento asintótico de tipo lineal**. Esto último suele expresarse diciendo que la sucesión $(\sqrt[n]{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ es del tipo "O **grande de** n", y se escribe en la forma $\sqrt[n]{n!} = O(n)$.

7.2. Ecuaciones generales: aspectos cualitativos

El propósito de esta sección es resolver ecuaciones polinomiales, es decir, hallar soluciones de ecuaciones del tipo

$$p(x) = 0, \tag{7.8}$$

donde p es un polinomio no constante con coeficientes reales. Este tipo de problemas aparece en diversas áreas de la matemática: determinar el signo de una función, encontrar autovalores de una matriz (que a su vez permite estudiar la naturaleza de los puntos de equilibrio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias), etc.

Si el polinomio p de (7.8) tiene coeficientes racionales, el **criterio de Gauss** (Lema 0.2.9) nos proporciona un **método efectivo para determinar todas las soluciones racionales** de (7.8), dado que determina explícitamente un conjunto finito de números racionales que contiene todas las posibles soluciones racionales de (7.8). En contraposición, no existe un criterio similar al de Gauss para determinar las raíces reales de un polinomio con coeficientes reales. Salvo en los casos de los polinomios de grado dos, tres y cuatro, en los que disponemos de fórmulas cerradas que expresan las raíces del polinomio en consideración en función de los coeficientes del mismo, para las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco debemos abandonar toda esperanza de hallar tal fórmula general (esto constituye un resultado fundamental del álgebra demostrado por Evariste Galois alrededor de 1830). Incluso en los casos particulares en los que ésta está disponible, su utilidad práctica es a menudo cuestionable, como hemos visto en nuestra discusión de las Secciones 2.1 y 2.2.

Todo esto pone de manifiesto la complejidad del problema (7.8), y la necesidad de realizar análisis "cualitativos". En tal sentido, en la Sección 7.2.1 vamos a estudiar cómo, en función de los coeficientes del polinomio en consideración, se puede determinar un intervalo acotado en el cual se encuentran todas las raíces reales del mismo. Posteriormente, en la Sección 7.2.2, vamos a dar algunos criterios que permiten determinar la cantidad de raíces reales en ciertos intervalos y la regla de los signos de Descartes. Si bien las cotas y estimaciones que vamos a proporcionar no son óptimas, son fáciles de obtener a partir de los coeficientes del polinomio en consideración, y por lo tanto, pueden ser útiles a efectos de delimitar la búsqueda. De hecho, los resultados de ambas secciones constituyen un insumo de suma utilidad para aplicar métodos de aproximación del tipo de bisección y Newton, como vamos a ver en la Sección 7.4.

Asimismo, en la Sección 7.3 vamos a discutir la regla de Sturm, a partir de la cual es posible determinar la cantidad exacta de raíces reales de un polinomio dado en un intervalo arbitrario,

aunque su aplicación requiere más "trabajo" que la de los criterios mencionados anteriormente.

7.2.1. Localización de las raíces reales

En esta sección vamos a estudiar métodos rápidos que nos permitan "localizar" las raíces de un polinomio dado, es decir, determinar un intervalo que contenga a todas las raíces del polinomio en consideración. Por ejemplo, dado el polinomio $p := 3x^5 - 34x^4 + 40x^3 - 58x^2 - x + 57$, vamos a estudiar cómo determinar, a partir de los coeficientes de p, cotas inferiores y superiores para todas las raíces reales de p, y por lo tanto, un intervalo acotado que las contiene.

Una primera observación que podemos hacer es que, dado un polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$, un número real α es raíz de p si y solo si $-\alpha$ es raíz de $p(-x)$. En consecuencia, cotas inferiores para las raíces negativas de p se deducen inmediatamente a partir de cotas superiores para las raíces positivas de $p(-x)$. En consecuencia, en lo que sigue vamos a centrar la atención en establecer cotas superiores para las raíces positivas del polinomio en consideración.

Ejercicio 7.2.1 (Una cota superior para las raíces positivas). *Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio no constante y $\alpha > 0$.*

1. *Demostrar que, si los coeficientes de p son positivos, entonces $p(\alpha) > 0$.*

2. *Probar la* **Regla de Laguerre***: si todos los coeficientes del cociente y el resto de la división de p por $x - \alpha$ son positivos, entonces $p(\beta) > 0$ para todo $\beta > \alpha$.*

Ejercicio 7.2.2 (Una versión efectiva de la Regla de Laguerre). *La Regla de Laguerre (Ejercicio 7.2.1) requiere de un número real α con "buenas propiedades". En el presente ejercicio nos proponemos exhibir un algoritmo que calcula un número real α que permite aplicar la Regla de Laguerre.*

Sea $p = a_0x^d + a_1x^{d-1} + \cdots + a_d \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio con $a_0 > 0$. Definimos:

$$p_0 := a_0,\ p_1 := xp_0 + a_1, \ldots,\ p_{d-1} := xp_{d-2} + a_{d-1},\ p_d := xp_{d-1} + a_d. \qquad (7.9)$$

1. *Demostrar que $p_d = p$.*[1]

2. *Demostrar que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y cada i con $1 \leq i \leq d$, tenemos la identidad $p_i = (x - \alpha)\big(p_0(\alpha)x^{i-1} + \cdots + p_{i-1}(\alpha)\big) + p_i(\alpha)$.*

3. *Si $\alpha > 0$ y $p_i(\alpha) \geq 0$ para $0 \leq i \leq d$, demostrar que $p(\beta) > 0$ para $\beta > \alpha$.*

4. *Demostrar que si $p_i(\alpha) \geq 0$ para $0 \leq i \leq k$, entonces $p_i(\beta) \geq 0$ para $0 \leq i \leq k$ y $\beta \geq \alpha$.*

5. *Concluir que el siguiente algoritmo determina $\alpha > 0$ tal que $p_i(\alpha) \geq 0$ para $0 \leq i \leq d$ (y por lo tanto, resulta una cota superior para las raíces reales de p).*

   (I) *Elegir $\alpha > 0$ tal que $p_1(\alpha) \geq 0$.*

[1] Cabe destacar que, dado que $p_d = p$, el cálculo de los términos sucesivos $p_0, p_1, \ldots, p_d$ nos provee un algoritmo para evaluar el polinomio p, que resulta de hecho **sumamente eficiente**. Este algoritmo se conoce con el nombre del **esquema** o la **regla de Horner**.

(II) *Determinar el menor entero k tal que, o $k = d+1$, o $k \leq d$ y $p_k(\alpha) < 0$.*

(III) *Si $k \leq d$, reemplazar α por $\beta \geq \alpha$ tal que $p_k(\beta) \geq 0$ y volver a* (II).

(IV) *El valor resultante α satisface $p_i(\alpha) \geq 0$ para $0 \leq i \leq d$.*

Ejercicio 7.2.3. *Determinar, por medio de la "versión efectiva" de la regla de Laguerre (Ejercicio 7.2.2), una cota superior para las raíces reales de $p := x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 1$.*

El Teorema de Taylor y la regla de Newton

Nuestro siguiente resultado es otra regla, la regla de Newton, que nos permite obtener cotas superiores para las raíces de un polinomio dado, la cual, si bien requiere más trabajo, permite obtener cotas superiores que son, en general, más finas que la regla de Laguerre. Esta regla se basa en el **desarrollo de Taylor** de un polinomio dado en torno a un punto $\alpha \in \mathbb{R}$, que discutimos a continuación.

Ejercicio 7.2.4 (Existencia del desarrollo en potencias de $x-\alpha$)**.** *Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado $d \geq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Aplicar el Teorema de división para polinomios (Teorema 0.2.6) y concluir que p puede expresarse en la forma $p = a_d(x-\alpha)^d + p_1$, con $a_d \in \mathbb{R}$ y $p_1 \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual que $d-1$.*

2. *Aplicar reiteradamente la división con resto de forma similar al ítem anterior y deducir que p puede expresarse en la forma*

$$p = a_d(x-\alpha)^d + a_{d-1}(x-\alpha)^{d-1} + \cdots + a_0. \tag{7.10}$$

Ejercicio 7.2.5 (Sobre los coeficientes en el desarrollo en potencias de $x-\alpha$)**.** *Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ como en (7.10).*

1. *Demostrar que $p(\alpha) = a_0$.*

2. *Derivar ambos miembros de (7.10) y concluir que $p'(\alpha) = a_1$.*

3. *Derivar sucesivamente como en el ítem anterior y concluir que $p^{(j)}(\alpha) = j!a_j$ para $0 \leq j \leq d$.*

Como consecuencia de los dos ejercicios anteriores, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.2.6 (Taylor)**.** *Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado $d \geq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$p = p(\alpha) + p'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{p''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{p^{(d)}(\alpha)}{d!}(x-\alpha)^d, \tag{7.11}$$

donde $p^{(j)} \in \mathbb{R}[x]$ representa la j–ésima derivada de p para $0 \leq j \leq d$.

Ejercicio 7.2.7 (Una cota superior para las raíces reales)**.** *Demostrar la siguiente generalización de la regla de Laguerre (Ejercicio 7.2.1), denominada la* **Regla de Newton**: *si $p^{(j)}(\alpha) \geq 0$ para $0 \leq j \leq d$, entonces $p(\beta) > 0$ para cada $\beta > \alpha$.*

Ejercicio 7.2.8. *Si $p := 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$, demostrar que cada raíz real α de p satisface la estimación $\alpha \leq 1$.*

Ejercicio 7.2.9. *Demostrar que si $\alpha \geq 3{,}5$, entonces $p(\alpha) > 0$, donde $p := x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 1$. Comparar esta cota superior con la que se obtiene aplicando la regla de Laguerre en el Ejercicio 7.2.3.*

Estimaciones en función de los coeficientes del polinomio

Tanto la regla de Laguerre como la regla de Newton permiten deducir una cota superior para todas las raíces reales de un polinomio dado **a partir de un número real α con "buenas propiedades"**. En lo que sigue nos proponemos **obtener cotas superiores solamente a partir de los coeficientes** del polinomio en consideración.

Ejercicio 7.2.10. *Sea $q := x^5 - 4x^4 - 20x^3 - 7x^2 + 4x - 28$.*

1. *Si $\alpha > 1$, demostrar que $q(\alpha) \geq \alpha^5 - 20(1 + \alpha + \cdots + \alpha^4) = \alpha^5 - 20\left(\frac{\alpha^5-1}{\alpha-1}\right)$.*
2. *Concluir que si $\alpha > 21$, entonces $q(\alpha) > 0$.*
3. *Determinar una cota inferior para las raíces reales de q.* (Sugerencia: observar que $\alpha < 0$ es raíz de q si y solo si $-\alpha$ es raíz de $q(-x)$.)

Generalizando la técnica del ejercicio precedente, tenemos el siguiente resultado de carácter general.

Lema 7.2.11 (Una cota superior para las raíces reales)**.** *Sea $p = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_0$ un polinomio de $\mathbb{R}[x]$ que tiene al menos un coeficiente a_i negativo, y sea e el mayor índice tal que $a_e < 0$. Si $M := \text{máx}\{|a_i| : a_i < 0\}$, entonces cada raíz real α de p satisface la estimación $\alpha < 1 + M^{1/(d-e)}$.*

Demostración. Observamos que la estimación del enunciado es evidentemente válida para las raíces α de p con $\alpha \leq 1$, por lo que solo es necesario analizar si la estimación es válida para las raíces reales α de p con $\alpha > 1$. Sea entonces $\alpha > 1$ una raíz real de p. Por la definición de e, tenemos que $a_{d-1} \geq 0, \ldots, a_{e+1} \geq 0$ y el valor absoluto de todos los coeficientes $a_i < 0$ está acotado superiormente por M. Por lo tanto,

$$p(\alpha) = \alpha^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i\alpha^i \geq \alpha^d - \sum_{\{i : a_i < 0\}} |a_i|\alpha^i \geq \alpha^d - M\sum_{i=0}^{e} \alpha^i = \alpha^d - M\left(\frac{\alpha^{e+1}-1}{\alpha-1}\right).$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}(\alpha-1)p(\alpha) \geq (\alpha-1)\alpha^d - M(\alpha^{e+1}-1) &> (\alpha-1)\alpha^d - M\alpha^{e+1} \\ &= \alpha^{e+1}\big((\alpha-1)\alpha^{d-e-1} - M\big).\end{aligned}$$

Dado que el término de la derecha de la desigualdad precedente es estrictamente positivo para $\alpha \geq 1 + M^{1/(d-e)}$, tenemos que $p(\alpha) > 0$ en este caso. Esto demuestra que las raíces de p satisfacen la estimación del enunciado. $\square$

El Lema 7.2.11 provee una de las muchas estimaciones disponibles para las raíces reales de un polinomio real a partir de sus coeficientes. En el ejercicio y el lema a continuación ofrecemos otra estimación.

Ejercicio 7.2.12. *Sea q el polinomio del Ejercicio 7.2.10.*

1. *Demostrar que toda raíz real α de q con $|\alpha| > 1$ satisface $|\alpha|^5 \leq 28\left(\frac{|\alpha|^5-1}{|\alpha|-1}\right)$.*

2. *Concluir que si α es raíz de q, entonces α pertenece al intervalo $[-29, 29]$.*

Generalizando las ideas del Ejercicio 7.2.12, tenemos el siguiente resultado.

Lema 7.2.13 (Una estimación para las raíces reales). *Sea $p = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ y sea $M := \max\{|a_i| : i = 0, \ldots, d-1\}$. Entonces cada raíz real α de p satisface la estimación $|\alpha| \leq 1 + M$.*

Demostración. Sea α una raíz real de p. Si $|\alpha| \leq 1$, entonces evidentemente se satisface la estimación del enunciado. Por lo tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|\alpha| > 1$. Dado que $0 = p(\alpha) = \alpha^d + a_{d-1}\alpha^{d-1} + \cdots + a_0$, tenemos que

$$|\alpha|^d \leq |a_{d-1}|\,|\alpha|^{d-1} + \cdots + |a_1|\,|\alpha| + |a_0| \leq M(|\alpha|^{d-1} + \cdots + |\alpha| + 1) = M\left(\frac{|\alpha|^d - 1}{|\alpha| - 1}\right).$$

En consecuencia, $|\alpha|^{d+1} - |\alpha|^d \leq M(|\alpha|^d - 1) \leq M|\alpha|^d$, de donde concluimos que $|\alpha|^{d+1} \leq (M+1)|\alpha|^d$, y por ende, deducimos la estimación del enunciado. □

Ejercicio 7.2.14 (Cotas inferiores para las raíces positivas). *Sea $p = a_d x^d + \cdots + a_0$ un polinomio en $\mathbb{R}[x]$ de grado d.*

1. *Demostrar que si α es una raíz de p distinta de cero, entonces $1/\alpha$ es raíz del polinomio $q := a_0 x^d + a_1 x^{d-1} + \cdots + a_{d-1}x + a_d$.*

2. *Deducir que si las raíces de q tienen módulo menor o igual que $M > 0$, entonces las raíces no nulas de p tienen módulo mayor o igual que $1/M$.*

Ejercicio 7.2.15. *Sea $p := x^6 - 12x^4 - 2x^3 + 37x^2 + 10x - 10$. Aplicar los Lemas 7.2.11 y 7.2.13 y el Ejercicio 7.2.2 a fin de hallar cotas inferiores y superiores para las raíces de p. ¿Cuál de las tres estimaciones es la mejor? ¿Por qué?*

Ejercicio 7.2.16. *En el estudio de los límites de sucesiones frecuentemente es necesario determinar a partir de qué valor se satisface una cierta inecuación. Los criterios anteriores pueden ser útiles para esto, como vamos a ver en los ítems a continuación.*

1. *Hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo $x > n_0$ sea solución de la inecuación*

$$x^{15} - 14x^{14} - \frac{21}{13}x^{13} + 11x^{11} - \frac{1}{6}x^7 + 3x^5 - 4x - 18 > 0.$$

2. *Hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo $x > n_0$ sea una solución común de las inecuaciones*

$$x^2 - 10x - 302 > 2, \quad 2x^5 - 43x^4 - \frac{102}{5}x^3 + 3x^2 - 3 > 4x - 2.$$

7.2.2. Estimaciones sobre la cantidad de raíces reales

Sea p un polinomio con coeficientes reales de grado positivo. Habiendo desarrollado herramientas que nos permiten obtener cotas inferiores y superiores para las raíces reales de p, en esta sección nos dedicamos al estudio de la cantidad de raíces reales de p.

Un resultado fundamental en esta dirección es el Teorema de Bolzano (Teorema 8.1.2), al que vamos a dedicar la Sección 8.1, que permite establecer la **existencia** de raíces reales en intervalos donde el polinomio en consideración cambia de signo. Sin embargo, a fin de aplicar el Teorema de Bolzano es necesario conocer a priori un intervalo en donde tengamos un cambio de signo, lo cual no es fácil de obtener en general, incluso teniendo en cuenta los resultados de localización de las raíces reales de la Sección 7.2.1.

Procediendo de forma similar a la Sección 7.2.1, nos proponemos obtener criterios simples para determinar la cantidad de raíces reales positivas de un polinomio dado en función de los coeficientes del mismo. Para esto, comenzamos con la siguiente observación (Ejercicios 7.2.1 y 7.2.5): si todos los coeficientes de p son positivos, entonces p no tiene raíces reales positivas. Esto nos da un indicio de que el signo de los coeficientes del polinomio en consideración puede ser relevante a la hora de determinar la cantidad de raíces reales positivas del mismo.

Más generalmente, dado un polinomio $p = a_d x^d + \cdots + a_0$ en $\mathbb{R}[x]$, denominamos la **variación de signos** $V(p)$ de p a la cantidad de cambios de signos de la sucesión finita $(a_d, \ldots, a_0)$, cuando ignoramos los coeficientes nulos. Por ejemplo, para el polinomio $p := x^3 - 2x + 3$ tenemos que $V(p) = 2$.

En lo que sigue, nos proponemos analizar cómo se relacionan la cantidad de cambios de signos en la sucesión $(a_d, \ldots, a_0)$ con la cantidad de raíces positivas del polinomio $p = a_d x^d + \cdots + a_0$.

Ejercicio 7.2.17. *Verificar que la sucesión de signos de los coeficientes del polinomio* $p := (x-2)(x^3 + 3x^2 - x + 11)$ *es* $+ + - + -$*, y por lo tanto, resulta* $V(p) = 3$.

Ejercicio 7.2.18. *Más generalmente, si* $\alpha > 0$*,* $a_3 > 0$*,* $a_2 > 0$*,* $a_1 < 0$ *y* $a_0 > 0$*, demostrar que, para* $p = b_4 x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 := (x-\alpha)(a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)$*, se tiene* $b_4 > 0$*,* $b_2 < 0$*,* $b_1 > 0$ *y* $b_0 < 0$*, y por lo tanto,* $V(p) = 3$.

En general, tenemos el siguiente resultado.

Lema 7.2.19. *Sea* $p \in \mathbb{R}[x]$ *un polinomio con* $V(p) = k$ *y* $\alpha > 0$*. Si* $q := (x-\alpha)p(x)$*, entonces* $V(q) \geq k+1$.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que p es de la forma $p = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_0$ con $a_d > 0$. Más aún, dado que estamos considerando raíces (estrictamente) positivas, podemos suponer que $a_0 \neq 0$. Sea $q := b_{d+1} x^{d+1} + \cdots + b_0$. De la definición de q tenemos que $b_{d+1} = a_d$, $b_j = a_{j-1} - \alpha a_j$ $(1 \leq j \leq d)$ y $b_0 = -\alpha a_0$.

Observamos que si $a_i > 0$ y $a_{i-1} < 0$, entonces $b_i < 0$, conclusión que también resulta válida en el caso en que $a_i > 0$, $a_{i-1} = 0, \ldots, a_{i-j} < 0$. Es decir, por cada cambio de signo de la forma $+-$ en p tenemos un coeficiente de q estrictamente negativo. Del mismo modo, si $a_i < 0$ y $a_{i-1} > 0$, entonces $b_i > 0$, lo que también resulta cierto si $a_i < 0$, $a_{i-1} = 0, \ldots, a_{i-j} > 0$. Concluimos entonces que, por cada cambio de signo de la forma $-+$ en p, tenemos un coeficiente estrictamente

positivo en q. En consecuencia, dado que a un cambio de signo $+-$ le sigue un cambio de signo $-+$ y viceversa, del hecho de que $V(p) = k$ vemos que la cantidad de cambios de signos en la sucesión $(b_d, \ldots, b_1)$ es al menos $k-1$, es decir, $V(b_d, \ldots, b_1) \geq k-1$.

A su vez, teniendo en cuenta que el primer cambio de signo en p es de la forma $+-$ (dado que $a_d > 0$), tenemos que el primer coeficiente de la sucesión $(b_d, \ldots, b_1)$ del que conocemos el signo es estrictamente negativo, y por lo tanto de signo contrario a b_{d+1}. En consecuencia, resulta $V(b_{d+1}, \ldots, b_1) \geq k$.

Por último, suponiendo que $a_0 < 0$, tenemos que el último cambio de signo en p es de la forma $+-$, y por ende, el último coeficiente de la sucesión finita $(b_{d+1}, \ldots, b_1)$ cuyo signo es conocido es negativo. Dado que $b_0 > 0$, tenemos al menos un cambio de signo más, es decir, $V(b_{d+1}, \ldots, b_0) \geq k+1$. Con un argumento similar se obtiene la misma conclusión para el caso $a_0 > 0$. □

El lema anterior es el paso clave a fin de mostrar la validez de la siguiente estimación sobre la cantidad de raíces positivas, conocida como la regla de los signos de Descartes.

Teorema 7.2.20 (Regla de los signos de Descartes)**.** *Sea p un polinomio en $\mathbb{R}[x]$. Entonces la cantidad de raíces positivas de p, contadas con multiplicidad, no puede ser mayor que $V(p)$.*

Demostración. Escribamos a p en la forma $p = (x-\alpha_1)^{n_1} \cdots (x-\alpha_r)^{n_r} q$, donde $\alpha_i > 0$ para $i = 1, \ldots, r$ y q es un polinomio (eventualmente constante) que no tiene raíces positivas. Aplicando sucesivamente el Lema 7.2.19, vemos que $V(p) \geq n_1 + \cdots + n_r + V(q) \geq n_1 + \cdots + n_r$. Esto concluye la demostración. □

Ejercicio 7.2.21. *Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado d con a lo sumo $(d+1)/2$ coeficientes no nulos tal que $p(0) \neq 0$. Demostrar que p no tiene todas sus raíces reales. ¿Es cierto el enunciado si $p(0) = 0$?*

Ejercicio 7.2.22 (Un caso particular de la Regla de Descartes)**.** *Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio tal que $V(p) = 1$. En tal caso, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p = a_d x^d + \cdots + a_{e+1} x^{e+1} - a_e x^e - \cdots - a_0$, con $a_i \geq 0$ para $0 \leq i \leq d$, $a_d > 0$ y $a_e > 0$.*

1. *Demostrar que la función $q : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definida por $q(x) := x^{-e} p(x) = a_d x^{d-e} + \cdots + a_{e+1} x - a_e - \cdots - a_0 x^{-e}$ es estrictamente creciente.*

2. *Determinar, en función de los coeficientes de p, reales positivos $\alpha < \beta$ tales que $p(\alpha) < 0 < p(\beta)$. Probar que el método de bisección, comenzando en el intervalo $[\alpha, \beta]$, obtiene una raíz positiva de p.*

3. *Concluir que p tiene una sola raíz real positiva.*

Ejercicio 7.2.23. *Mostrar que el polinomio $x^8 + x^7 - 11x^6 - 14x^5 + 23x^4 + 45x^3 - 37x^2 - 10$ no tiene todas sus raíces reales.*

Ejercicio 7.2.24. *Supongamos que $p := x^{11} + x^8 - 3x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2$ es el polinomio característico de una matriz $A \in \mathbb{R}^{11\times 11}$. ¿Cuántos autovalores positivos puede tener A como máximo? ¿Cuántos negativos? ¿Es posible diagonalizar A en $\mathbb{R}$?*

7.3. Cantidad de raíces en un intervalo: la regla de Sturm

Si bien la regla de Descartes nos provee estimaciones sobre la cantidad de raíces reales de un polinomio, dichas estimaciones no nos permiten determinar de forma precisa cuántas raíces reales tiene un polinomio con coeficientes reales ni dónde éstas se encuentran ubicadas. El propósito de esta sección es discutir un resultado, conocido como **la regla de Sturm**, que nos permite determinar **exactamente** la cantidad de raíces reales de un polinomio dado en un intervalo. En particular, combinando este resultado con estimaciones sobre el valor absoluto de las raíces reales (como las del Lema 7.2.13), obtenemos la cantidad exacta de raíces reales de un polinomio con coeficientes reales.

Cabe destacar que la regla de Sturm es un resultado central en el ámbito del estudio y localización de las raíces reales de polinomios reales. Para otros resultados en esta dirección, puede consultarse, entre otros, el libro [Mig92].

Una primera observación de importancia es que, a efectos de determinar la cantidad de raíces reales de un polinomio dado en un intervalo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que **todas las raíces reales del mismo son simples**. En efecto, sea $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio no constante. Afirmamos que las raíces reales de p coinciden con las raíces reales del polinomio $p_{red} := p/q$, donde $q \in \mathbb{R}[x]$ es el máximo común divisor entre p y el polinomio derivado p'. En efecto, si $\alpha \in \mathbb{R}$ es una raíz de multiplicidad k de p, entonces $p = (x-\alpha)^k r(x)$, donde $r \in \mathbb{R}[x]$ satisface la condición $r(\alpha) \neq 0$. Es fácil ver que el polinomio derivado p' tiene una factorización de la forma $p' = (x-\alpha)^{k\ 1} s(x)$, donde $s(\alpha) \neq 0$ (Lema 0.2.10). En consecuencia, $q = \text{mcd}(p, p') = (x-\alpha)^{k\ 1} t(x)$ con $t(\alpha) \neq 0$, de donde concluimos que p/q tiene una factorización de la forma $p_{red} = p/q = (x-\alpha)u(x)$ con $u \in \mathbb{R}[x]$ y $u(\alpha) \neq 0$, es decir, α **es una raíz simple de** p/q.

Ejemplo 7.3.1. *Consideremos el polinomio*

$$p := x^5 - 8x^4 + 25x^3 - 38x^2 + 28x - 8 = (x-1)^2(x-2)^3.$$

En tal caso, tenemos que $p' = 5x^4 - 32x^3 + 75x^2 - 76x + 28$, *y el máximo común divisor de* p *y* p' *es el siguiente polinomio:*

$$q := \text{mcd}(p, p') = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

Por lo tanto, el polinomio $p_{red} := p/q$ *es*

$$p_{red} = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

Constatamos que p_{red} *tiene las mismas raíces que* p*, todas con multiplicidad 1.*

En consecuencia, a efectos de determinar la cantidad de raíces reales de un polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ en un intervalo dado, vamos a suponer sin pérdida de generalidad que p tiene todas sus raíces reales simples; o, más generalmente,

(H1) p no tiene factores comunes en $\mathbb{R}[x]$ con su polinomio derivado p'.

7.3.1. El algoritmo de Sturm

Supongamos que $p \in \mathbb{R}[x]$ satisface (H1). El **algoritmo de Sturm**, a partir del cual deducimos la regla de Sturm, funciona en base a la siguiente versión modificada del algoritmo de Euclides (ver la Sección 0.2.2), comenzando con $f_0 := p$ y $f_1 := p'$:

$$\begin{aligned} f_0 &= f_1 q_1 - f_2, \\ f_1 &= f_2 q_2 - f_3, \\ &\vdots \\ f_{r-2} &= f_{r-1} q_{r-1} - f_r, \\ f_{r-1} &= f_r q_r - 0. \end{aligned}$$

Según (H1), el máximo común divisor entre p y p' es igual a 1. En consecuencia, el último resto no nulo en el algoritmo de Euclides aplicado a p y p' resulta constante (Teorema 0.2.7). Concluimos que $f_r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Consideramos la **sucesión de Sturm**

$$\mathscr{S} := (f_0, f_1, \ldots, f_r).$$

Dado $c \in \mathbb{R}$, denominamos $V(c)$ a la cantidad de cambios de signos en la sucesión finita $\mathscr{S}(c) := (f_0(c), f_1(c), \ldots, f_r(c))$. La regla de Sturm afirma que, si a y b son dos números reales con $a < b$ que no son raíces de p, **la cantidad de raíces reales de p en el intervalo $[a,b]$ coincide con la diferencia** $V(a) - V(b)$. Para ver que esto es así, vamos a estudiar cómo aumenta $V(c)$ a medida que c avanza desde el extremo izquierdo a hasta el extremo derecho b del intervalo en consideración.

Supongamos que

$$a < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s < b$$

son las raíces reales de todos los polinomios $f_0, \ldots, f_r$ de la sucesión de Sturm en el intervalo (a,b). Tenemos en primer lugar la siguiente observación.

Observación 7.3.2. *Ningún α_j puede ser raíz de dos elementos consecutivos f_i y f_{i+1} de la sucesión de Sturm.*

Demostración. Si $f_i(\alpha_j) = f_{i+1}(\alpha_j) = 0$, dado que $f_i = f_{i+1}q_{i+1} - f_{i+2}$, concluimos que $f_{i+2}(\alpha_j) = f_{i+1}(\alpha_j)q_{i+1}(\alpha_j) - f_i(\alpha_j) = 0$. Argumentado de esta manera, deducimos que $f_r(\alpha_j) = 0$, lo cual contradice el hecho de que f_r es un polinomio constante no nulo, y por lo tanto no posee raíces reales. □

Nuestra segunda observación concierne el comportamiento de $V(c)$ cuando c varía en un intervalo (α_j, α_{j+1}). Tenemos que ninguno de los polinomios f_i de la sucesión de Sturm posee una raíz real en intervalo (α_j, α_{j+1}). Si existieran $c_1, c_2 \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$ tales que el signo de $f_i(c_1)$ es distinto del signo de $f_i(c_2)$, entonces, por el Teorema de Bolzano en $\mathbb{R}$ (que vamos a discutir en la Sección 8.1) concluiríamos que existe una raíz de f_i en el intervalo (α_j, α_{j+1}), contradiciendo la definición de (α_j, α_{j+1}). En resumen, tenemos la siguiente observación.

Observación 7.3.3. *Si $c_1, c_2 \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$, entonces la sucesión $\mathscr{S}(c_1)$ tiene los mismos signos que la sucesión $\mathscr{S}(c_2)$. En particular, $V(c_1) = V(c_2)$.*

Resta analizar cómo varían los signos de la sucesión de Sturm $\mathscr{S}(c)$ cuando pasamos de un intervalo (α_{j-1}, α_j) al intervalo siguiente (α_j, α_{j+1}). Fijemos $c_1 \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ y $c_2 \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$.

Si $f_0(\alpha_j) = 0$, dado que f_0 y f_1 no poseen raíces comunes (Observación 7.3.2 o hipótesis (H1)), resulta $f_1(\alpha_j) \neq 0$.

- Si $f_1(\alpha_j) > 0$, entonces $f_1(c) > 0$ para cada $c \in (\alpha_{j-1}, \alpha_{j+1})$, por lo que f_0 resulta creciente en $(\alpha_{j-1}, \alpha_{j+1})$. Dado que $f_0(\alpha_j) = 0$, concluimos que $f_0(c_1) < 0 < f_0(c_2)$. En particular, las correspondientes sucesiones de signos son las siguientes:

$$\mathscr{S}(c_1) = (-, +, \ldots) \text{ y } \mathscr{S}(c_2) = (+, +, \ldots).$$

- Si $f_1(\alpha_j) < 0$, argumentando de forma similar vemos que f_0 es decreciente en $(\alpha_{j-1}, \alpha_{j+1})$. Por lo tanto, $f_0(c_1) > f_0(\alpha_j) = 0 > f_0(c_2)$, y las correspondientes sucesiones de signos son las siguientes:

$$\mathscr{S}(c_1) = (+, -, \ldots) \text{ y } \mathscr{S}(c_2) = (-, -, \ldots).$$

En ambos casos, el efecto de pasar de un intervalo (α_{j-1}, α_j) al intervalo siguiente (α_j, α_{j+1}) es que la cantidad de cambios de signos se incrementa en 1, es decir, $V(c_1) - V(c_2) = 1$. Así, tenemos la siguiente observación.

Observación 7.3.4. *Si α_j es raíz de f_0, dados $c_1 \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ y $c_2 \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$, tenemos que $V(c_1) = V(c_2) + 1$.*

Consideramos ahora el caso en que α_j es raíz de f_i con $i > 0$ y pasamos de un intervalo (α_{j-1}, α_j) al intervalo siguiente (α_j, α_{j+1}). Fijamos nuevamente $c_1 \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ y $c_2 \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$.

Por la Observación 7.3.2 tenemos que $f_{i-1}(\alpha_j) \neq 0$ y $f_{i+1}(\alpha_j) \neq 0$, de lo que concluimos que tanto f_{i-1} como f_{i+1} no cambian de signo en el intervalo $(\alpha_{j-1}, \alpha_{j+1})$. Especializando la identidad

$$f_{i-1}(x) = f_i(x)q_i(x) - f_{i+1}(x) \tag{7.12}$$

vemos que $f_{i-1}(\alpha_j) = -f_{i+1}(\alpha_j)$, es decir, f_{i-1} y f_{i+1} tienen signos opuestos en α_j. En particular, las sucesiones de signos en c_1 y c_2 son de la forma

$$\mathscr{S}(c_1) = (\cdots, +, *, -, \cdots) \text{ y } \mathscr{S}(c_2) = (\cdots, +, *, -, \ldots), \quad \text{o}$$
$$\mathscr{S}(c_1) = (\cdots, -, *, +, \cdots) \text{ y } \mathscr{S}(c_2) = (\cdots, -, *, +, \ldots).$$

En ambos casos, independientemente del signo de $f_i(c_1)$ y $f_i(c_2)$, la cantidad de cambios de signos $V(c_1)$ y $V(c_2)$ es la misma. Resumimos esta discusión en la siguiente observación.

Observación 7.3.5. *Si α_j es raíz de algún f_i con $i > 0$, dados $c_1 \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ y $c_2 \in (\alpha_j, \alpha_{j+1})$, tenemos que $V(c_1) = V(c_2)$.*

Si $f_i(a) = 0$ o $f_i(b) = 0$ para $i > 0$, entonces la conclusión es similar a la anterior: suponiendo, por ejemplo, que $f_i(a) = 0$, tanto f_{i-1} como f_{i+1} no se anulan en a, y especializando la identidad

(7.12) en $x = a$ concluimos que f_{i-1} y f_{i+1} tienen signos opuestos en a. Así, tenemos la siguiente observación.

Observación 7.3.6. *Si a o b son raíces de algún f_i con $i > 0$, dados $c_1 \in (a, \alpha_1)$ o $c_2 \in (\alpha_s, b)$, tenemos que $V(a) = V(c_1)$ y $V(c_2) = V(b)$.*

7.3.2. El Teorema de Sturm

A partir de todas las observaciones previas podemos relacionar la diferencia $V(a) - V(b)$ con la cantidad de raíces reales del polinomio p en el intervalo $[a,b]$. En efecto, si $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s < b$ son las raíces reales de todos los polinomios $f_0, \ldots, f_r$ de la sucesión de Sturm en el intervalo (a,b), de acuerdo con las Observaciones 7.3.3 y 7.3.6, tenemos que

- la cantidad de cambios de signos $V(c)$ se mantiene constante en cada uno de los intervalos $[a, \alpha_1)$, (α_j, α_{j+1}) para $(1 \leq j \leq s-1)$ y $(\alpha_s, b]$.

Asimismo, de las Observaciones 7.3.4 y 7.3.5 concluimos que

- la cantidad de cambios de signos $V(c)$ aumenta en 1 de un intervalo (α_{j-1}, α_j) al intervalo siguiente (α_j, α_{j+1}) si y solo si $p(\alpha_j) = 0$.

En consecuencia, la cantidad de cambios signos $V(c)$ aumenta en 1, cuando "avanzamos" en el intervalo $[a,b]$, tantas veces como raíces reales del polinomio p haya. Así, deducimos el siguiente resultado, conocido como el **Teorema de Sturm**.

Teorema 7.3.7 (Sturm). *Si $a < b$ no son raíces del polinomio p, entonces la cantidad de raíces reales de p en el intervalo $[a,b]$ es igual a $V(a) - V(b)$.*

Ejemplo 7.3.8 (Continuación del Ejemplo 7.3.1). *Recordamos que, dado el polinomio $p := x^5 - 8x^4 + 25x^3 - 38x^2 + 28x - 8 = (x-1)^2(x-2)^3$, por medio de cálculos de máximo común divisor hemos obtenido el polinomio "reducido"*

$$p_{red} := x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2),$$

que tiene las mismas raíces que p, aunque con multiplicidad 1. A este polinomio podemos aplicarle el Teorema de Sturm.

La sucesión de Sturm asociada al polinomio p_{red} es la siguiente:

$$f_0 := p_{red} = x^2 - 3x + 2, \;\; f_1 := (p_{red})' = 2x - 3, \;\; f_2 := 1/4,$$

donde f_2 es el opuesto aditivo del resto en la división de f_0 por f_1. En particular, el comportamiento de la sucesión de signos de $\mathscr{S}(c)$ es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} (+,-,+) & \text{si } c \in (-\infty, 1), \\ (-,-,+) & \text{si } c \in (1, 3/2), \\ (-,+,+) & \text{si } c \in (3/2, 2), \\ (+,+,+) & \text{si } c \in (2, +\infty). \end{array}$$

Vemos entonces que la cantidad de cambios de signos decrece en 1 cuando atravesamos una raíz de p_{red}, en tanto que se mantiene constante en el caso restante ($c = 3/2$).

Ejercicio 7.3.9. *Sea $p := x^3 + ax + b$ un polinomio cúbico con $a \neq 0$.*

1. *Demostrar que si $4a^3 + 27b^2 > 0$, entonces p tiene una sola raíz real.*
2. *Demostrar que si $4a^3 + 27b^2 < 0$, entonces p tiene tres raíces reales distintas.* (Sugerencia: observar que, en tal caso, $a < 0$.)
3. *Si $4a^3 + 27b^2 = 0$, probar que no se puede aplicar la regla de Sturm directamente al polinomio p. Demostrar que, de todos modos, p tiene sus tres raíces reales.*

Ejercicio 7.3.10. *Demostrar que el polinomio $p := x^4 + ax^2 + bx - c$, donde $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $c > 0$, tiene exactamente dos raíces reales.*

7.4. Ecuaciones generales: aspectos cuantitativos

En esta sección vamos a combinar los resultados cualitativos que hemos obtenido en las secciones anteriores, fundamentalmente el resultado de localización de las raíces (Lema 7.2.13) y la regla de Sturm (Teorema 7.3.7), con los métodos de bisección y Newton, que hemos utilizado a fin de determinar la raíz n–ésima de un número real positivo dado, a efectos de resolver ecuaciones polinomiales.

7.4.1. Un método seguro: la regla de Sturm + bisección

Consideramos la ecuación

$$p(x) = 0, \tag{7.13}$$

donde $p = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ es un polinomio de grado $d > 0$. De acuerdo a lo que hemos dicho a propósito de la regla de Sturm (Sección 7.3), sin pérdida de generalidad podemos suponer que p satisface la siguiente hipótesis:

(H1) p no tiene factores comunes en $\mathbb{R}[x]$ con su polinomio derivado p'.

El Lema 7.2.11 nos proporciona la siguiente estimación de las raíces reales de p: si $\alpha \in \mathbb{R}$ es una solución de (7.13) y $M := \text{máx}\{|a_i| : 0 \leq i \leq d-1\}$, entonces

$$|\alpha| < 2 + M. \tag{7.14}$$

El primer paso es determinar si la ecuación (7.13) tiene soluciones reales. Si hay una solución, entonces ésta satisface (7.14). Así, aplicando la regla de Sturm a p en el intervalo $[-2-M, 2+M]$ determinamos el número exacto de soluciones reales de (7.13) y, en particular, si existe alguna solución.

La primera etapa: aislar las soluciones

Supongamos ahora que tenemos $N \geq 1$ soluciones de (7.13). Nos proponemos determinar estas soluciones, es decir, determinar aquellas soluciones que podamos determinar explícitamente, por medio de una cantidad finita de pasos, y determinar sucesiones que convergen a cada una de las restantes soluciones. Para esto, vamos a refinar progresivamente el intervalo de búsqueda, a fin de obtener N intervalos disjuntos en los cuales (7.13) tiene una sola solución. En cada uno de estos intervalos, de manera similar a lo que hemos hecho a propósito de la resolución de la ecuación $x^2 = 2$ en la Sección 2.1, que luego generalizamos en la Sección 7.1 a fin de determinar la solución positiva de $x^n = a$, con $n \in \mathbb{N}$ y $a > 0$ arbitrarios, vamos a poder aplicar el método de bisección.

Sea entonces $I_0 := [A_0, B_0] := [-2-M, M+2]$ y $C_0 := (A_0 + B_0)/2$. Subdividimos I_0 en los intervalos $I_0^{(1)} := [A_0, C_0]$ y $I_0^{(2)} := [C_0, B_0]$. Aplicamos la regla de Sturm en ambos intervalos y nos "quedamos" con alguno de estos intervalos (o ambos) si la cantidad de raíces reales de p en el mismo es mayor o igual que 1. Ahora, subdividimos cada uno de los intervalos $I_0^{(1)}$ e $I_0^{(2)}$ que contenga más de una solución de (7.13) en dos intervalos de la misma longitud, y aplicamos la regla de Sturm en cada subintervalo a fin de determinar cuántas soluciones reales tiene (7.13) en el mismo.

Así, proseguimos hasta que, o bien el extremo de alguno de estos intervalos es una solución de (7.13), en cuyo caso habremos determinado explícitamente una solución de (7.13), o bien cada uno de los intervalos resultantes contiene una única solución de (7.13) (ver la Figura 7.1 por un ejemplo de este proceso).

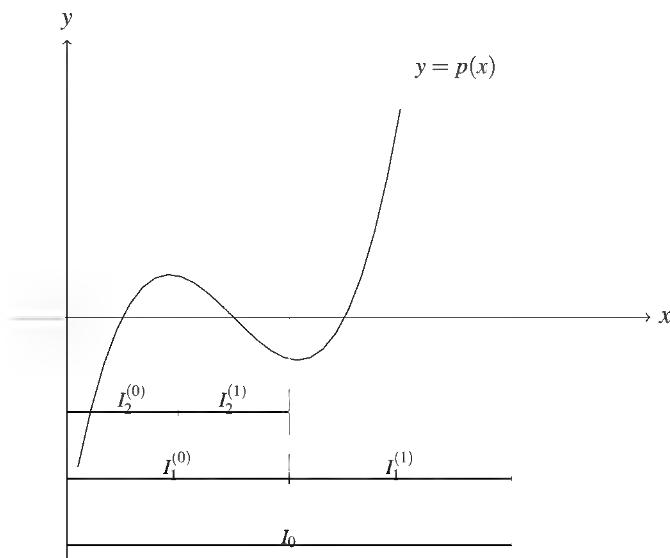


Figura 7.1.: El proceso de determinación de los N intervalos.

El siguiente resultado asegura que este proceso funciona correctamente.

Teorema 7.4.1. *Sea $N \geq 0$ la cantidad de soluciones de (7.13). El algoritmo descripto determina*

explícitamente $M \leq N$ soluciones de (7.13) y $N - M$ intervalos cerrados y acotados, de interior disjunto dos a dos, en los cuales p tiene una única raíz real.

Demostración. A cada paso del proceso, clasificamos los intervalos que se determinan en "procesables" y "procesados". Simultáneamente, "guardamos" las soluciones de (7.13) que aparecen como extremos de alguno de los intervalos considerados. Así, si el extremo α de algún intervalo es una raíz de p, dividimos a p por $x-\alpha$ y seguimos el proceso con el polinomio $p/(x-\alpha)$. Además, guardamos a α en la lista de raíces de p.

En una etapa de "procesamiento", cada intervalo "procesable", que por definición contiene al menos dos raíces de p, se subdivide en dos subintervalos de la misma longitud, en cada uno de los cuales se determina la cantidad de raíces reales. Si alguno de estos subintervalos contiene una sola raíz de p, y ésta no coincide con ninguno de los extremos de este subintervalo, entonces lo guardamos en la lista de intervalos "procesados". Por otro lado, si algún subintervalo contiene más de una raíz real de p, entonces lo incluimos en la lista de intervalos a "procesar" en la siguiente etapa. Por último, si un subintervalo no contiene raíces reales de p, lo descartamos.

El proceso termina cuando no quedan más intervalos por procesar, en cuyo caso tenemos aislada a cada solución de (7.13), sea porque la hemos determinado explícitamente, o porque resulta la única solución en un intervalo "procesado". □

Ejemplo 7.4.2. *Consideramos la ecuación $x^4 - 12x^3 + 30x^2 - 12x + 1 = 0$. De acuerdo con (7.14), tenemos que, si $M := 30$, entonces las soluciones α de esta ecuación satisfacen la estimación*

$$|\alpha| \leq 2 + M = 32.$$

En la tabla a continuación mostramos, para cada $N \geq 0$, los intervalos "procesados", junto con la cantidad de raíces de la ecuación en cada uno de ellos. Como hemos dicho, cuando obtenemos un intervalo en el cual hay una única solución, éste ya no se procesa.

Etapa	*Intervalo*	*# raíces*	*Intervalo*	*# raíces*
$N=0$	$I_0 = [-32;32]$	4		
$N=1$	$I_1 = [0;32]$	4		
$N=2$	$I_2 = [0;16]$	4		
$N=3$	$I_3^{(1)} = [0;8]$	3	$I_3^{(2)} = [8;16]$	1
$N=4$	$I_4^{(1)} = [0;4]$	3	$I_4^{(2)} = [8;16]$	1
$N=5$	$I_5^{(1)} = [0;2]$ $I_5^{(3)} = [8;16]$	2 1	$I_5^{(2)} = [2;4]$	1
$N=6$	$I_6^{(1)} = [0;1]$ $I_6^{(3)} = [8;16]$	2 1	$I_6^{(2)} = [2;4]$	1
$N=7$	$I_7^{(1)} = [0;0{,}5]$ $I_7^{(3)} = [8;16]$	2 1	$I_7^{(2)} = [2;4]$	1
$N=8$	$I_8^{(1)} = [0;0{,}25]$ $I_8^{(3)} = [2;4]$	1 1	$I_8^{(2)} = [0{,}25;0{,}5]$ $I_8^{(4)} = [8;16]$	1 1

Ejercicio 7.4.3. *Separar las raíces reales de los siguientes polinomios:*

1. $p := x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x - 2$, 2. $p := x^3 + x^2 - 2x - 2$.

La segunda etapa: aproximar las soluciones

Supongamos ahora que tenemos un intervalo $[a,b]$ en el cual (7.13) tiene una única solución $\alpha \in (a,b)$. Como vamos a ver más adelante (Lema 7.4.9), resulta $p(a) \cdot p(b) < 0$, lo cual nos permite aplicar el **método de bisección** a fin de determinar la única solución de la ecuación $p(x) = 0$ en $[a,b]$, como discutimos a continuación.

Escribamos $a_0 := a$, $b_0 := b$ y $c_0 := (a_0 + b_0)/2$. Si $p(c_0) \neq 0$, definimos el intervalo $I_1 := [a_1, b_1]$ como la mitad izquierda o derecha de $I_0 := [a_0, b_0]$ en la cual p "cambia de signo". Luego, determinamos $c_1 := (a_1 + b_1)/2$ y subdividimos a I_1 en los intervalos $I_1^{(0)} := [a_1, c_1]$ y $I_1^{(1)} := [c_1, b_1]$. Si $p(c_1) \neq 0$, definimos a I_2 como el intervalo $I_1^{(j)}$ en el cual p cambia de signo. Prosiguiendo de esta manera, construimos una sucesión de intervalos cerrados, acotados y encajados $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ con las siguientes propiedades:

- $b_n - a_n = (b_0 - a_0)/2^n$,
- $p(a_n) \cdot p(b_n) < 0$.

(ver la Figura 7.2 por un ejemplo de este proceso).

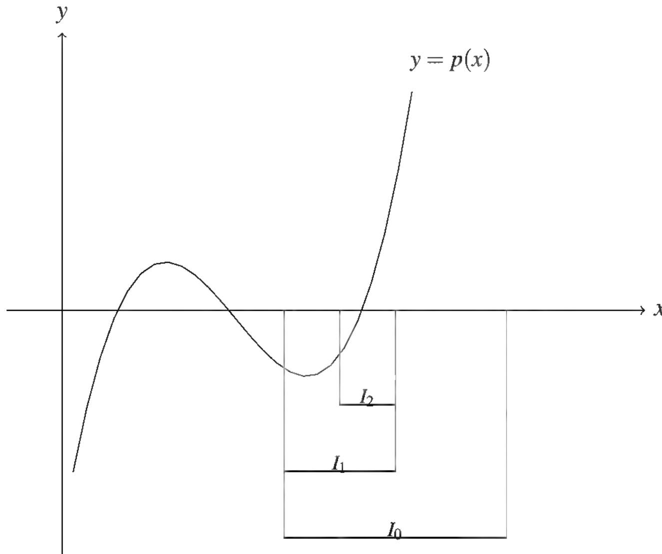


Figura 7.2.: El proceso de bisección en un intervalo.

Supongamos que ningún punto c_n es raíz de p. Dado que, por definición,

$$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0, \tag{7.15}$$

la Hipótesis 2 de completitud asegura que la intersección de la sucesión de intervalos $(I_n)_{n>0}$ consiste exactamente de un punto, digamos

$$\bigcap_{n>0} I_n = \{\alpha\}.$$

Tenemos entonces que $a_n \leq \alpha \leq b_n$ para cada $n \geq 0$, por lo que

$$0 \leq b_n - \alpha \leq b_n - a_n$$

para cada $n \geq 0$. Así, teniendo en cuenta (7.15), por la propiedad sandwich (Lema 3.1.35) concluimos que $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$. Esto y (7.15) a su vez implican que $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Finalmente, combinando estas dos igualdades, el hecho de que $p(a_n)\cdot p(b_n) < 0$ para cada $n \geq 0$ y la continuidad de p, concluimos que

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} p(a_n)\cdot p(b_n) = p(\alpha)^2 \geq 0,$$

es decir, $p(\alpha) = 0$. Resumimos todas estas consideraciones en el siguiente enunciado.

Teorema 7.4.4 (Bolzano). *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $p \in \mathbb{R}[x]$ tales que $p(a)\cdot p(b) < 0$. Entonces existe $\alpha \in [a,b]$ tal que $p(\alpha) = 0$. Más aún, o bien $\alpha = c_n$ para algún punto c_n del método de bisección precedente, o bien la sucesión $(c_n)_{n>0}$ converge a α.*

Una consecuencia importante del Teorema de Bolzano es que **todo polinomio** $p \in \mathbb{R}[x]$ **de grado impar tiene una raíz real**, como discutimos a continuación.

Ejemplo 7.4.5. *Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado impar. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que p es mónico, es decir, p es de la forma*

$$p := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \tag{7.16}$$

siendo $n \in \mathbb{N}$ un número impar. En efecto, si p no es mónico, es decir, $p = a_n x^n + \cdots + a_0$ con $a_n \neq 0$, entonces $a_n^{-1} p$ es mónico y tiene las mismas raíces que p.

Argumentando como en la demostración de la estimación de las raíces del Lema 7.2.11, sea $M := \max\{|a_i| : 0 \leq i \leq n-1\}$. Tenemos que, si $\alpha > 1+M$, entonces

$$p(\alpha) \geq \alpha^n - M\alpha^{n-1} - \cdots - M = \alpha^n - M\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} \geq \alpha^n - \frac{M\alpha^n}{\alpha - 1} = \frac{\alpha^n}{\alpha - 1}(\alpha - 1 - M) > 0.$$

Por otro lado, tenemos que

$$p(-\alpha) \leq -\alpha^n + M(\alpha^{n-1} + \cdots + 1) \leq -\alpha^n + \frac{M\alpha^n}{\alpha - 1} = -\frac{\alpha^n}{\alpha - 1}(\alpha - 1 - M) < 0.$$

Concluimos que p cambia de signo en $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, el Teorema de Bolzano (Teorema 7.4.4) asegura que p tiene una raíz real, como queríamos demostrar.

Ejercicio 7.4.6. *Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio mónico de grado $d > 0$ par.*

1. *Demostrar que existe $M > 0$ tal que $p(\alpha) > 0$ para cada α con $|\alpha| > M$.*

2. *Demostrar que, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ con $p(\alpha) < 0$, entonces p tiene al menos dos raíces reales distintas.*

Ejercicio 7.4.7. *Sea $p := a_d x^d + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado $d > 0$ par. Demostrar que si $a_d a_0 < 0$, entonces p tiene una raíz positiva y una raíz negativa.*

Ejercicio 7.4.8. *Dados números reales $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n-1} < a_{2n}$ y λ, demostrar que*

$$(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_{2n-1}) + \lambda^2(x-a_2)(x-a_4)\cdots(x-a_{2n})$$

tiene n raíces reales distintas.

Para concluir la discusión sobre la segunda etapa de nuestro método de resolución de ecuaciones polinomiales, hemos afirmado que, en cada uno de los intervalos que nos provee la regla de Sturm, podemos suponer que el polinomio en consideración cambia de signo. El siguiente resultado asegura que esto es así.

Lema 7.4.9. *Si p satisface (H1) y $[a,b]$ es un intervalo real en el que p tiene una sola raíz real $\alpha \in (a,b)$, entonces $p(a) \cdot p(b) < 0$.*

Demostración. Dado que p satisface (H1), α es una raíz simple de p, por lo que existe $q \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p = (x-\alpha) \cdot q$ y $q(\alpha) \neq 0$ (Lema 0.2.10). Dado que la única raíz de p en el intervalo $[a,b]$ es α, deducimos q no tiene raíces en $[a,b]$. En consecuencia, $q(a)$ y $q(b)$ tienen el mismo signo, ya que, en caso contrario, por el Teorema de Bolzano (Teorema 0.3.1 o 7.4.4) concluiríamos que q tiene una raíz real en el intervalo $[a,b]$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $q(a) > 0$ y $q(b) > 0$. Entonces

$$p(a) = (a-\alpha)q(a) < 0 < (b-\alpha)q(b) = p(b).$$

Esto concluye la demostración del lema. □

7.4.2. El método de Newton para ecuaciones polinomiales

En la sección previa hemos discutido un método que nos garantiza determinar **todas** las soluciones reales de una ecuación polinomial $p(x) = 0$ dada, siendo $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio no constante. El método, que combina la regla de Sturm con el método de bisección, determina algunas soluciones en forma exacta y produce sucesiones que convergen a cada una de las soluciones restantes. Desafortunadamente, dicho método puede resultar sumamente lento, dado que el intervalo en el que comienza la búsqueda puede ser "grande" y el método de bisección es lento (obtener cada nuevo dígito decimal de la solución en consideración requiere aproximadamente de 3 a 4 iteraciones). En la discusión sobre la solución de $x^2 = 2$ (Capítulo 2), que hemos generalizado posteriormente al caso de raíces enésimas de reales positivos (Sección 7.1), hemos visto que hay una alternativa mucho más eficiente al método de bisección: el método de Newton. Nuestra intención es discutir cómo se aplica el método de Newton a fin de resolver ecuaciones polinomiales y establecer resultados de convergencia.

El método de Newton

Nuevamente, consideramos una ecuación de la forma

$$p(x) = 0, \tag{7.17}$$

donde $p = x^d + p_{d-1}x^{d-1} + \cdots + p_0 \in \mathbb{R}[x]$ es un polinomio de grado $d > 0$ cuyas **raíces** son **simples**, es decir, satisface la siguiente hipótesis:

(H1) p no tiene factores comunes en $\mathbb{R}[x]$ con su polinomio derivado p'.

Supongamos que tenemos una aproximación inicial a_0 de una solución α de (7.17). Llamamos e_0 al error que cometemos en dicha aproximación, es decir, $e_0 := \alpha - a_0$, de forma tal que $\alpha = a_0 + e_0$. Como ya hemos dicho anteriormente, la idea clave del método de Newton es "linealizar" la ecuación (7.17). Para esto, suponiendo que e_0 es "significativamente menor" que a_0, observamos que, si $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$(a_0 + e_0)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_0^j e_0^{k-j} \approx a_0^k + k a_0^{k-1} e_0,$$

si se desprecian términos de orden al menos cuadrático en e_0. Concluimos entonces que

$$\begin{aligned} 0 = p(\alpha) = p(a_0 + e_0) = \sum_{k=0}^{d} p_k (a_0 + e_0)^k &\approx \sum_{k=0}^{d} p_k (a_0^k + k a_0^{k-1} e_0) \\ &= \sum_{k=0}^{d} p_k a_0^k + \sum_{k=0}^{d} p_k k a_0^{k-1} e_0 = p(a_0) + p'(a_0) e_0, \end{aligned}$$

si en $p(a_0 + e_0)$ se desprecian términos de orden al menos cuadrático en e_0. Así, tenemos que $0 \approx p(a_0) + p'(a_0)e_0$, de lo cual, suponiendo que $p'(a_0) \neq 0$, concluimos que

$$e_0 \approx -\frac{p(a_0)}{p'(a_0)}.$$

Esto sugiere que la siguiente fórmula provee una "mejor aproximación" a_1 de α que a_0:

$$a_1 := a_0 - \frac{p(a_0)}{p'(a_0)}.$$

Si ahora consideramos refinamientos sucesivos de nuestras aproximaciones con el argumento precedente, obtenemos la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ definida por

$$a_{n+1} := a_n - \frac{p(a_n)}{p'(a_n)} \tag{7.18}$$

(suponiendo que $p'(a_n) \neq 0$ para cada $n \geq 0$). Ésta es la sucesión del **método de Newton** aplicado a la ecuación $p(x) = 0$.

Ejemplo 7.4.10. *Consideramos nuevamente la ecuación $x^4 - 12x^3 + 30x^2 - 12x + 1 = 0$ del Ejemplo 7.4.2. Siendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4 - 12x^3 + 30x^2 - 12x + 1$, la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ del método*

de Newton, comenzando en $a_0 \in \mathbb{R}$, es la siguiente:

$$a_{n+1} := a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - \frac{a_n^4 - 12a_n^3 + 30a_n^2 - 12a_n + 1}{4a_n^3 - 36a_n^2 + 60a_n - 12}.$$

De todas maneras, es importante señalar que, si bien nuestro argumento sugiere que los errores mejoran, y por lo tanto, la sucesión del método de Newton converge, para elecciones “desafortunadas” de la “aproximación inicial” a_0, dicha sucesión **no necesariamente converge**, como vemos en el ejemplo a continuación.

Ejemplo 7.4.11. *Consideremos la ecuación $x^3 - x = 0$. La sucesión del método de Newton $(a_n)_{n>0}$ correspondiente a esta ecuación es*

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^3 - a_n}{3a_n^2 - 1} = \frac{2a_n^3}{3a_n^2 - 1}.$$

Supongamos que elegimos $a_0 := 1/\sqrt{5}$. Tenemos entonces que

$$a_1 = \frac{2/(\sqrt{5})^3}{3/5 - 1} = \frac{2/(5\sqrt{5})}{-2/5} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -a_0,\ a_2 = \frac{2(-a_0)^3}{3(-a_0)^2 - 1} = \frac{-2a_0^3}{3a_0^2 - 1} = -a_1 = a_0.$$

Concluimos que $a_3 = -1/\sqrt{5}$, $a_4 = 1/\sqrt{5}$, etc. (ver la Figura 7.3).

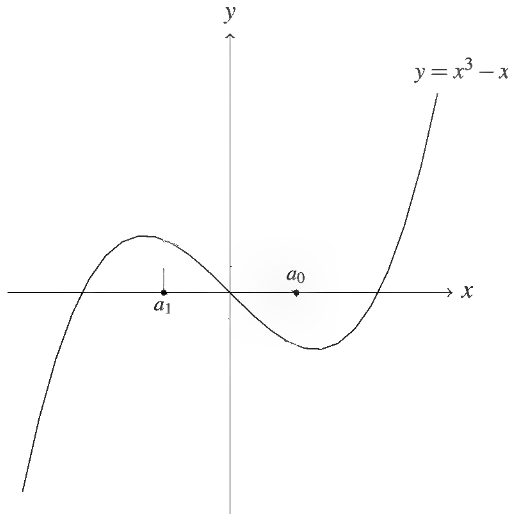


Figura 7.3.: El método de Newton aplicado a $x^3 - x = 0$.

Un resultado general de convergencia local

Una primera observación de importancia es que, si una sucesión del método de Newton converge, converge a una solución de la ecuación en consideración. En efecto, dado $a_0 \in \mathbb{R}$, consideramos

la sucesión (7.18) del método de Newton, aplicada a la ecuación (7.17), donde las raíces reales del polinomio p son simples, o más precisamente, p satisface la hipótesis (H1). Supongamos que esta sucesión está bien definida, es decir, $p'(a_n) \neq 0$ para cada $n \geq 0$, y existe $\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dado que $a_{n+1} = a_n - p(a_n)/p'(a_n)$, resulta $p'(a_n)(a_n - a_{n+1}) = p(a_n)$, y por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} p'(a_n)(a_n - a_{n+1}) = p'(\alpha)\cdot 0 = 0 = \lim_{n\to\infty} p(a_n) = p(\alpha).$$

Así, hemos demostrado el siguiente resultado.

Lema 7.4.12. *Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ la sucesión (7.18) del método de Newton aplicada a la ecuación (7.17). Si $(a_n)_{n\geq 0}$ está bien definida y existe $\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n$, entonces $p(\alpha) = 0$.*

En vistas de este resultado, se trata ahora de determinar condiciones bajo las cuales la sucesión del método de Newton converge, en cuyo caso el límite resultará una solución de la ecuación en consideración. En tal sentido, el Ejemplo 7.4.11 muestra que no siempre dicha sucesión converge.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una raíz de p. De acuerdo con el Teorema de Taylor (Teorema 7.2.6), podemos expresar a p por su escritura en potencias de $(x-\alpha)$:

$$p = p'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{p''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{p^{(d)}(\alpha)}{d!}(x-\alpha)^d. \tag{7.19}$$

Sea $a \in \mathbb{R}$ una aproximación de α tal que $p'(a) \neq 0$. Queremos concluir que si a está suficientemente cerca de α, entonces la sucesión del método de Newton, comenzando en a, converge a α. Para esto, definimos $N_p(x) := x - p(x)/p'(x)$ y estudiamos el error que cometemos al aproximar α por $N_p(a)$, en relación con $a-\alpha$. Tenemos que

$$N_p(a) - \alpha = a - \frac{p(a)}{p'(a)} - \alpha = a - \alpha + \frac{(a-\alpha)\cdot q(a)}{p'(a)} = (a-\alpha)\left(1 - \frac{q(a)}{p'(a)}\right),$$

siendo q el polinomio $q := p/(x-\alpha)$. Dado que $q\cdot(x-\alpha) = p$, tenemos que $q'\cdot(x-\alpha)+q = p'$, y por lo tanto, $q = p' - q'\cdot(x-\alpha)$. En consecuencia,

$$N_p(a) - \alpha = (a-\alpha)\left(1 - \frac{p'(a) - q'(a)\cdot(a-\alpha)}{p'(a)}\right) = (a-\alpha)^2\frac{q'(a)}{p'(a)}. \tag{7.20}$$

Esta identidad sugiere que, a fin de estimar el error $|N_p(a)-\alpha|$, es necesario acotar superiormente $|q'(a)|$ e inferiormente $|p'(a)|$. Para esto, de (7.19) deducimos que

$$p' = \sum_{k=1}^{d} \frac{p^{(k)}(\alpha)}{(k-1)!}(x-\alpha)^{k-1}, \quad q' = \sum_{k=2}^{d}(k-1)\frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^{k-2}.$$

Dado que p no tiene raíces múltiples, ya que satisface la hipótesis (H1), y $p(\alpha) = 0$, resulta

$p'(\alpha) \neq 0$. En consecuencia, si $|a-\alpha| < 1$, entonces

$$|p'(a)| \geq |p'(\alpha)| - \sum_{k=2}^{d} \left| \frac{p^{(k)}(\alpha)}{(k-1)!} \right| |a-\alpha|^{k-1} \geq |p'(\alpha)| - |a-\alpha| \sum_{k=2}^{d} \frac{|p^{(k)}(\alpha)|}{(k-1)!};$$

$$|q'(a)| \leq \sum_{k=2}^{d} \frac{k-1}{k!} |p^{(k)}(\alpha)||a-\alpha|^{k-2} \leq \sum_{k=2}^{d} \frac{|p^{(k)}(\alpha)|}{(k-1)!}.$$

Sea $M := \sum_{k=2}^{d} |p^{(k)}(\alpha)|/(k-1)!$ y supongamos que $|a-\alpha| < \text{mín}\{1, |p'(\alpha)|/2M\}$. Tenemos entonces que

$$|p'(a)| \geq |p'(\alpha)| - |a-\alpha|M > \frac{|p'(\alpha)|}{2}$$

y $|q'(a)| \leq M$. Por lo tanto, de (7.20) deducimos que

$$|N_p(a)-\alpha| \leq |a-\alpha|^2 \frac{2M}{|p'(\alpha)|} < |a-\alpha|.$$

Este análisis es el punto clave para demostrar la buena definición y convergencia local de la sucesión del método de Newton a α, como vemos a continuación.

Teorema 7.4.13 (Convergencia local del método de Newton)**.** *Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado $d \geq 2$ que satisface (H1), sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una raíz de p y sea $M := \sum_{k=2}^{d} |p^{(k)}(\alpha)|/(k-1)!$. Si $|a_0 - \alpha| < \delta := \text{mín}\{1, |p'(\alpha)|/4M\}$, entonces la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ del método de Newton está bien definida y converge a α.*

Demostración. A fin de demostrar la buena definición, argumentamos de forma inductiva. Dado que $|a_0 - \alpha| < \delta$, de nuestro análisis previo tenemos que $|p'(a_0)| > |p'(\alpha)|/2 > 0$, por lo que $a_1 := a_0 - p(a_0)/p'(a_0)$ resulta bien definido. Además,

$$|a_1 - \alpha| = |N_p(a_0) - \alpha| \leq |a_0 - \alpha|^2 \frac{2M}{|p'(\alpha)|} < \frac{1}{2}|a_0 - \alpha| < \delta.$$

Supongamos ahora que el término a_n está bien definido y satisface la condición $|a_n - \alpha| < \delta$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Entonces $|p'(a_n)| \geq |p'(\alpha)|/2 > 0$, de lo cual concluimos que $a_{n+1} := a_n - p(a_n)/p'(a_n)$ está bien definido. Asimismo,

$$|a_{n+1} - \alpha| = |N_p(a_n) - \alpha| \leq |a_n - \alpha|^2 \frac{2M}{|p'(\alpha)|} < \frac{1}{2}|a_n - \alpha| < \delta.$$

Esto concluye nuestro argumento y muestra que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton está bien definida.

Finalmente, las estimaciones precedentes muestran que

$$|a_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|a_n - \alpha|$$

para cada $n \geq 0$. En consecuencia, $|a_n - \alpha| \leq \delta/2^n$ para cada $n \geq 0$, de lo que concluimos que $(a_n)_{n>0}$ converge a α. □

Ejemplo 7.4.14. *Consideremos nuevamente la ecuación* $x^3 - x = 0$*. La sucesión del método de Newton* $(a_n)_{n>0}$ *correspondiente a esta ecuación es*

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^3 - a_n}{3a_n^2 - 1} = \frac{2a_n^3}{3a_n^2 - 1}. \tag{7.21}$$

Analizamos el resultado de convergencia local precedente para la solución $\alpha = 1$ *de esta ecuación. Observamos que*

$$p'(1) = 2, \quad p''(1) = 6, \quad p'''(1) = 6.$$

Nuestro resultado de convergencia local del método de Newton (Teorema 7.4.13) asegura que, si definimos

$$M := |p''(1)| + \frac{1}{2}|p'''(1)| = 9, \quad \delta := \text{mín}\{1, |p'(1)|/4M\} = 1/18,$$

para cada a_0 *que satisface la condición* $|a_0 - 1| < \delta$*, la sucesión* $(a_n)_{n>0}$ *definida por (7.21) converge a 1. De hecho, vale que, si* $a_0 \in (1/\sqrt{3}, +\infty)$*, entonces la sucesión del método de Newton converge a 1, lo cual en particular implica nuestro resultado de convergencia local en este caso.*

Ejemplo 7.4.15. *Consideramos nuevamente la ecuación* $x^4 - 12x^3 + 30x^2 - 12x + 1 = 0$ *del Ejemplo 7.4.10. Esta ecuación tiene cuatro soluciones, a saber:*

$$\alpha_1 \approx 0{,}1147622748, \ \alpha_2 \approx 0{,}3550473809, \ \alpha_3 \approx 2{,}816525494, \ \alpha_4 \approx 8{,}713664850.$$

Recordamos que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ *del método de Newton es la definida de la siguiente manera, comenzando en* $a_0 \in \mathbb{R}$*:*

$$a_{n+1} := a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - \frac{a_n^4 - 12a_n^3 + 30a_n^2 - 12a_n + 1}{4a_n^3 - 36a_n^2 + 60a_n - 12}.$$

Es interesante notar que, para $a_0 \in \mathbb{R}$ *arbitrario, si la sucesión* $(a_n)_{n>0}$ *precedente converge,* **no necesariamente lo hace a la raíz más cercana** *de* a_0*. Más aún, para valores de* a_0 *cercanos, la sucesión* $(a_n)_{n>0}$ **puede converger a distintas raíces de la ecuación en consideración***, como ilustramos en la Tabla 7.1.*

Ejercicio 7.4.16. *Consideramos la ecuación* $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$*, cuyas soluciones son* $x = 1$*,* $x = 2$ *y* $x = 3$*. Sea* $(a_n)_{n>0}$ *la correspondiente sucesión del método de Newton.*

1. *Determinar condiciones suficientes sobre* a_0 *que aseguren la convergencia de* $(a_n)_{n>0}$ *a cada una de las soluciones de la ecuación.*
2. *Estudiar la convergencia de* $(a_n)_{n>0}$ *en los casos* $a_0 := 0{,}1$*,* $a_0 := 1{,}1$ *y* $a_0 := 2{,}1$*.*
3. *Estudiar la convergencia de* $(a_n)_{n>0}$ *en los casos* $a_0 := 5{,}4$*,* $a_0 := 5{,}5$ *y* $a_0 := 5{,}6$*.*

El Teorema 7.4.13 es un **resultado de convergencia local**. Más precisamente, el Teorema 7.4.13 nos permite asegurar que, si comenzamos el método de Newton en un valor a_0 "suficientemente

Tabla 7.1.: El método de Newton aplicado a $x^4 - 12x^3 + 30x^2 - 12x + 1 = 0$.

n	a_n	a_n	a_n	a_n	a_n
0	1.420000000	1.430000000	6.000000000	6.500000000	7.000000000
1	0.246270078	−2.094835025	2.583333333	−0.689606742	27.500000000
2	0.723335347	−1.230443647	2.861299196	−0.303808092	21.515502250
3	0.457063731	−0.649642808	2.817682052	−0.073299999	17.082445220
4	0.374953910	−0.279113450	2.816526305	0.049977384	13.838920550
5	0.356279285	−0.059332957	2.816525495	0.102086447	11.528723360
6	0.355052842	0.056690685	2.816525491	0.114087213	9.983419854
7	0.355047381	0.104197364	2.816525494	0.114760168	9.100241842
8	0.355047381	0.114285714	2.816525494	0.114762274	8.763721379
9	0.355047381	0.114761223	2.816525494	0.114762275	8.714653921
10	0.355047381	0.114762275	2.816525494	0.114762275	8.713665245

cerca" de una solución α de la ecuación $p(x) = 0$ en consideración, entonces la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton necesariamente converge a α. Por otro lado, la condición

$$|a_0 - \alpha| < \text{mín}\left\{1, \frac{|p'(\alpha)|}{4M}\right\},$$

siendo $M := \sum_{k=2}^{d} |p^{(k)}(\alpha)|/(k-1)!$, **no es "calculable"**, en el sentido de que requiere información sobre el comportamiento del polinomio p en la solución α en cuestión que generalmente no está disponible. Desde 1978 en adelante, se determinaron condiciones "calculables" sobre a_0 que garantizan que la correspondiente sucesión del método de Newton $(a_n)_{n>0}$ converge a una solución de la ecuación en consideración (ver, por ejemplo, [McN07, §5.3] por un panorama actual sobre este tipo de resultados).

Ejercicio 7.4.17 (El método de Newton en presencia de raíces múltiples). *Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de la forma $p = (x-\alpha)^m q$, con $q \in \mathbb{R}[x]$ y $q(\alpha) \neq 0$.*

1. *Sea $N(x) := x - mp(x)/p'(x)$. Demostrar que*

$$N(x) - \alpha = (x-\alpha)^2 \frac{q'(x)}{mq(x) + (x-\alpha)q'(x)}.$$

2. *Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que, si $|a-\alpha| < \delta$, entonces $|q(a)| > |q(\alpha)|/2$ y $|q'(a)| \leq 2|q'(\alpha)|$.*

3. *Demostrar que existe $\delta' > 0$ tal que, si $|a-\alpha| < \delta'$, entonces*

$$|N(a) - \alpha| \leq \frac{|a-\alpha|^2 8|q'(\alpha)|}{m|q(\alpha)|}.$$

4. *Concluir que existe $\delta'' > 0$ tal que, si $|a_0 - \alpha| < \delta''$, entonces la sucesión $(a_n)_{n>0}$,*

$$a_{n+1} := a_n - m\frac{p(a_n)}{p'(a_n)} \quad (n \geq 0)$$

está bien definida, converge a α y tenemos, para cada $n \geq 0$, la estimación

$$|a_{n+1} - \alpha| \leq |a_n - \alpha|^2 \frac{8|q'(\alpha)|}{m|q(\alpha)|}.$$

Un resultado de convergencia global para funciones monótonas

De acuerdo con el Ejemplo 7.4.11, comenzando en a_0 arbitrario, la sucesión del método de Newton $(a_n)_{n>0}$ no necesariamente converge a una solución de la ecuación en consideración. Por otro lado, el Teorema 7.4.13 asegura que hay convergencia local. Sin embargo, en el estudio de las raíces enésimas de reales positivos hemos visto que, comenzando con $a_0 > \sqrt[n]{a}$, la sucesión del método de Newton necesariamente converge a $\sqrt[n]{a}$ (Ejercicio 7.1.4). El propósito de esta sección es explicar por qué esto es así.

La raíz n–ésima α de un real positivo a es la solución de la ecuación $x^n - a = 0$. La función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) := x^n - a$ posee dos características fundamentales que garantizan la convergencia de la sucesión del método de Newton $(a_n)_{n>0}$ para cada $a_0 > 0$:

(1) $p'(r) > 0$ para cada $r > 0$;

(2) $p''(r) > 0$ para cada $r > 0$.

Afirmamos que, si $p \in \mathbb{R}[x]$ satisface las condiciones (1) y (2) en algún intervalo $[a, +\infty)$ y la ecuación $p(x) = 0$ posee una solución real $\alpha \in (a, +\infty)$, entonces la sucesión del método de Newton $(a_n)_{n>0}$ converge a α para cada $a_0 \in (a, +\infty)$.

En efecto, dado que p es estrictamente creciente en $[a, +\infty)$ y $p(\alpha) = 0$, concluimos que $p(a) < p(\alpha) = 0 < p(r)$ para cada $r > \alpha$. Sea $a_0 > \alpha$ y $a_1 := a_0 - p(a_0)/p'(a_0)$. Es claro que a_1 está bien definido, dado que $p'(a_0) > 0$. Además, $p(a_0)/p'(a_0) > 0$, lo cual implica que $a_1 < a_0$. Por último, la función $N_p : (a, b) \to \mathbb{R}$, $N_p(x) := x - p(x)/p'(x)$ resulta bien definida y es creciente en $[\alpha, +\infty)$, ya que

$$N_p'(r) = 1 - \frac{p'(r)^2 - p(r)p''(r)}{p'(r)^2} = \frac{p(r)p''(r)}{p'(r)^2} > 0$$

para cada $r > \alpha$. Por ende, $N_p(\alpha) = \alpha < N_p(a_0) = a_1$. En resumen, si $a_0 > \alpha$, entonces

$$\alpha < a_1 < a_0.$$

Así, inductivamente, vemos que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton, comenzando en $a_0 \in (\alpha, +\infty)$, está bien definida, es decreciente y acotada inferiormente. En consecuencia, la Hipótesis 3 de completitud nos asegura que converge. Sea $\beta := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dado que se trata de una sucesión convergente, el Lema 7.4.12 nos asegura que $p(\beta) = 0$. Teniendo en cuenta que $\alpha \leq \beta \leq a_0$, concluimos que $\beta = \alpha$.

Para el caso en que $a_0 \in (a, \alpha)$, basta tener en cuenta que $a_1 > \alpha$ y argumentar como en el caso anterior. En conclusión, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.4.18 (Convergencia para funciones crecientes y convexas). *Sean $p \in \mathbb{R}[x]$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que p tiene una raíz real en el intervalo $(a, +\infty)$ y se satisfacen las condiciones $p'(r) > 0$ y $p''(r) > 0$ para cada $r > a$. Entonces p tiene una única raíz $\alpha \in [a, +\infty)$ y, para cada $a_0 > a$, la sucesión del método de Newton $(a_n)_{n>0}$ converge a α.*

Ejercicio 7.4.19. *Completar la demostración del Teorema 7.4.18: considerar el caso en que $a_0 \in (a, \alpha)$.*

Ejemplo 7.4.20. *Consideramos la ecuación $x^4 + x - 3 = 0$, que tiene dos soluciones reales, $\alpha_1 \approx -1{,}452626879$ y $\alpha_2 \approx 1{,}164035140$. Si llamamos $p := x^4 + x - 3$, observamos que $p' = 4x^3 + 1$ y $p'' = 12x^2$. Teniendo en cuenta que $p'(r) > 0$ y $p''(r) > 0$ para cada $r > 0$, por el Teorema 7.4.18 concluimos que la sucesión de Newton $(a_n)_{n>0}$ converge a α_2 para cada $a_0 > 0$.*

Ejercicio 7.4.21. *Para la ecuación $x^4 + x - 3 = 0$, demostrar que la sucesión del método de Newton $(a_n)_{n>0}$ converge a α_2 para cada $a_0 < -1$.*

Un caso en el que las condiciones del Teorema 7.4.18 se cumplen es el de los polinomios cuyas raíces son todas reales, como vemos en el ejercicio a continuación.

Ejercicio 7.4.22 (El método de Newton para polinomios que se factorizan linealmente). *Sea $p := (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_d)$, siendo $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_d$.*

1. *Probar que p' se factoriza en la forma $p' = a(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_{d-1})$, con $\alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1}$ para $1 \leq i \leq d - 1$.*
2. *Más generalmente, si $k \in \{1, \ldots, d-1\}$, demostrar que $p^{(k)}$ tiene todas sus raíces reales y simples y que $\alpha_1 < \alpha < \alpha_d$ para cada raíz α de $p^{(k)}$.*
3. *Concluir que si $a > \alpha_d$, entonces $p^{(k)}(a) > 0$ para $0 \leq k \leq d - 1$.*
4. *Aplicar el Teorema 7.4.18 y deducir que si $a_0 > \alpha_d$, la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton está bien definida y converge a α_d.*

8. Resultados de existencia para funciones continuas

En este capítulo, prosiguiendo con la definición "preliminar" del cuerpo ordenado completo de los números reales que hemos dado (Definición 6.4.1), retomamos los problemas que nos interesan con toda generalidad: se trata de resolver la ecuación $f(x) = 0$, o el problema de minimización $\min_{x\in A} f(x)$, o el problema de equilibrio $f(x) = x$, siendo f una función continua definida sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}$. La cuestión central de este capítulo va a ser la de la **factibilidad** de nuestros problemas modelo.

En tal sentido, dado un subconjunto A de $\mathbb{R}$ y una función continua $f : A \to \mathbb{R}$, vamos a establecer condiciones sobre A y f que permiten asegurar la existencia de ceros, mínimos o estados de equilibrio de f en A. En el caso de las ecuaciones y los problemas de equilibrio, vamos a poder establecer la existencia de soluciones de forma **constructiva**, por medio de un método que nos permite obtener una sucesión que converge al punto cuya existencia demostramos. Así, vamos a discutir el método de bisección para la resolución de ecuaciones y la iteración de punto fijo para la resolución de problemas de equilibrio. Asimismo, las condiciones que deba satisfacer el conjunto A sobre el cual resolvemos nuestros problemas modelo nos van a conducir a considerar dos nociones básicas de la topología de $\mathbb{R}$: la conexión y la compacidad.

Finalmente, vamos a constatar que estos resultados de existencia se fundamentan a partir de las tres hipótesis de completitud de $\mathbb{R}$, lo cual nos va a proveer de una motivación adicional para retomar la definición "preliminar" del cuerpo ordenado de los números reales a fin de transformarla en una "definitiva", lo cual va a ser el tema cental del siguiente capítulo.

8.1. Existencia de ceros: el Teorema de Bolzano

Retomando nuestra discusión a propósito de la ecuación $x^2 = 2$ del Capítulo 4, hemos visto que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función definida por $f(x) := x^2 - 2$, a fin de resolver la ecuación $f(x) = 0$ partimos de la siguiente observación: dado que $f(1) < 0 < f(2)$ y f es continua, es "esperable" que tengamos una solución de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[1,2]$. De hecho, el método de bisección nos permite obtener de forma efectiva la solución positiva de dicha ecuación. Esto es un caso particular del conocido Teorema de Bolzano, que discutimos a continuación.

Consideramos ahora una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que satisface la condición $f(a) < 0 < f(b)$ (o $f(a) > 0 > f(b)$, cuyo análisis se realiza de manera similar). Llamemos $I_0 := [a_0,b_0] := [a,b]$, $a_0 := a$, $b_0 := b$ y $c_0 := (a_0 + b_0)/2$. Como antes, si $f(c_0) = 0$, entonces encontramos de manera explícita un cero de f en $[a,b]$. Por otro lado, si $f(c_0) < 0$ definimos $a_1 := c_0$ y $b_1 := b_0$, en tanto que si $f(c_0) > 0$ definimos $a_1 := a_0$ y $b_1 := c_0$. En otras palabras, si $f(c_0) \neq 0$,

entonces definimos el intervalo $I_1 := [a_1, b_1]$ como la mitad izquierda o derecha de $I_0 := [a_0, b_0]$ en la cual f "cambia de signo". Prosiguiendo de esta manera, suponiendo que en ninguna etapa del proceso determinamos un cero de f de manera explícita, construimos una sucesión $(I_n)_{n>0} := ([b_n - a_n])_{n \geq 0}$ de intervalos cerrados, acotados y encajados (es decir, $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$) tales que:

- $b_n - a_n = (b_0 - a_0)/2^n$,
- $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.

Dado que la longitud de los intervalos I_n tiende a 0, esto es, $\lim_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$, la Hipótesis 2 de completitud nos asegura que éstos se intersecan en un punto, digamos c. En consecuencia, las sucesiones $(a_n)_{n>0}$ y $(b_n)_{n>0}$ convergen a c. Con una demostración similar a la del caso $x^2 = 2$ (Lema 4.1.2), o más generalmente, el Teorema de Bolzano para polinomios (Teorema 7.4.4), vemos que $f(c) = 0$.

Finalmente, dado que los intervalos I_n están encajados y $\{c\} = \bigcap_{n>0} I_n$, concluimos que $c \in I_0 = [a, b]$. En resumen, tenemos el siguiente enunciado.

Teorema 8.1.1 (Teorema de Bolzano – Forma preliminar). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Cabe destacar que nuestra demostración del Teorema de Bolzano es **constructiva**, dado que permite obtener aproximaciones arbitrariamente precisas del cero de f cuya existencia se asegura, para la cual hemos utilizado el **método de bisección**. Esto se condice con una idea que tratamos de transmitir en este texto: obtener un resultado de existencia es, en algún sentido, **una primera etapa de "trabajo"**, importante en tanto nos asegura que nuestra búsqueda tiene sentido. Aun así, resta "resolver" la ecuación en consideración, es decir, determinar explícitamente una solución y obtener una sucesión que converja a la misma. En tal sentido, una demostración constructiva de existencia constituye la situación "ideal" a la que apuntamos.

Una versión más precisa del Teorema de Bolzano

Es interesante notar que la demostración del Teorema de Bolzano en ningún momento **utiliza la hipótesis de que el intervalo I que constituye el dominio de la función f es cerrado y acotado**. De hecho, reexaminando la demostración, vemos que el "éxito" del método de bisección se debe a los dos hechos siguientes:

1. existen dos puntos a, b en el dominio de f en los cuales f cambia de signo,
2. cada punto intermedio entre a y b pertenece al dominio de f.

La necesidad de la condición 1 es evidente. Más interesante es la condición 2, que **caracteriza la noción de intervalo real**. Esto nos conduce a un enunciado más general, aunque menos estándar, del Teorema de Bolzano: un función continua definida sobre un **intervalo arbitrario** I que cambia de signo en I tiene un cero en I.

Teorema 8.1.2 (Teorema de Bolzano). *Sea I un intervalo real y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Si existen $a, b \in I$ tales que $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in I$ tal que $f(c) = 0$.*

Ejemplo 8.1.3. *Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función $f(x):=x^4-2x^2-2/x$. Afirmamos que f tiene una raíz real positiva. En efecto, tenemos que $f(1)=-3$, en tanto que $f(2)=7>0$. En consecuencia, dado que f es continua y cambia de signo en $(0,+\infty)$, de lo que concluimos que tiene una raíz real positiva.*

En los ejercicios siguientes usamos el Teorema de Bolzano a fin de establecer la existencia de puntos con determinadas propiedades.

Ejercicio 8.1.4 (Sobre la existencia de puntos fijos). *Sea $A\subset\mathbb{R}$ y $f:A\to\mathbb{R}$ una función. Un* **punto fijo** *de f es un elemento $c\in A$ tal que $f(c)=c$. Observamos que geométricamente un punto fijo de f corresponde a un punto en la intersección entre el gráfico de f y el gráfico de la función identidad $id:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $id(x):=x$ (¡pensarlo!). La Sección 8.3 se va a dedicar a estudiar la cuestión de la existencia y unicidad de puntos fijos de funciones reales.*

Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función continua definida sobre un intervalo real I.

1. *Si $f\big([a,b]\big)$[1]$\subset[a,b]$ para ciertos $a,b\in I$, demostrar que existe $c\in I$ tal que $f(c)=c$.* (Sugerencia: considerar la función $g:I\to\mathbb{R}$, $g(x):=f(x)-x$.)
2. *El resultado anterior no es cierto sobre un intervalo I* **arbitrario***: demostrar que la función $f(x):=x^2$ satisface la condición $f\big((0,1)\big)\subset(0,1)$, y sin embargo, no posee puntos fijos en $(0,1)$.*
3. *Más aún, el resultado anterior tampoco es cierto sobre un intervalo I* **cerrado arbitrario***: demostrar que la función $f(x):=e^x$ satisface la condición $f\big([0,+\infty)\big)\subset[0,+\infty)$, y sin embargo, no posee puntos fijos en $[0,+\infty)$.*

Ejercicio 8.1.5 (Métodos de "bracketing"). *Una clase de métodos de resolución de ecuaciones, la de los denominados métodos de bracketing (que podría traducirse como "poner entre corchetes"), se basa en el Teorema de Bolzano. La estrategia de los métodos de bracketing es similar a la del método de bisección: dado un intervalo real I, una función continua $f:I\to\mathbb{R}$, y dados $a,b\in I$ tales que $f(a)\cdot f(b)<0$, se trata de refinar sucesivamente el intervalo inicial $I_0:=[a_0,b_0]:=[a,b]$ mediante una sucesión de intervalos cerrados, acotados y encajados $(I_n)_{n>0}:=([a_n,b_n])_{n>0}$ de manera tal que $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$ para cada $n\geq 0$.*

1. *Demostrar que existe al menos un cero de f en I_n para cada $n\geq 0$.*
2. *Demostrar que si $(b_n-a_n)_{n>0}$ converge a 0, entonces la intersección $\cap_{n>0}I_n$ consiste de un solo punto, digamos c, que pertenece a I.*
3. *Demostrar que, en tal caso, $f(c)=0$.*

Ejercicio 8.1.6 (Método de regula falsi). *Un conocido método de "bracketing" es el de la* **regula falsi***. En dicho método, partiendo de $a_0,b_0\in I$ tales que $f(a_0)f(b_0)<0$, definimos*

$$a_1:=a_0-\frac{a_0-b_0}{f(a_0)-f(b_0)}f(a_0).$$

[1]Recordamos que, si S es un subconjunto de I, definimos $f(S):=\{y\in\mathbb{R}:\text{ existe } s\in S \text{ con } y=f(s)\}$.

Si $f(a_1) = 0$, tenemos una raíz de f. Si no, elegimos $b_1 \in \{a_0, b_0\}$ de modo tal que $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Así sucesivamente obtenemos una sucesión $(I_n)_{n>0} := ([a_n, b_n])_{n>0}$ de intervalos cerrados, acotados y encajados que contienen una raíz de f.

1. *Interpretar geométricamente la elección de a_1.*

2. *Demostrar que $I_1 := [a_1, b_1]$ está contenido en $[a_0, b_0]$.*

3. *Desafortunadamente, la sucesión de longitudes de los intervalos $(I_n)_{n>0}$ no necesariamente converge a 0: demostrar que si f es convexa[2] y creciente en $[a_0, b_0]$, y $f(b_0) > 0$, entonces $b_n = b_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

4. *Afortunadamente, en las condiciones del ítem anterior, la sucesión $(a_n)_{n>0}$ converge a la (única) raíz de f en $[a_0, b_0]$.*

   a) *Demostrar que $(a_n)_{n>0}$ es creciente y acotada, y por lo tanto, de acuerdo con la Hipótesis 3 de completitud, converge a $\alpha \in [a_0, b_0]$.*

   b) *Demostrar que $f(\alpha) = 0$.*

8.1.1. Una versión topológica del Teorema de Bolzano: conexión

La demostración del Teorema de Bolzano (Teorema 8.1.2) es exactamente la de la "forma preliminar" del mismo (Teorema 8.1.1). ¿Por qué enfatizamos la diferencia entre ambos enunciados? Porque es importante entender **qué** característica del dominio I de una función continua f, que cambia de signo en I, hace que ésta tenga un cero en I.

Es claro que **no toda** función continua que cambia de signo en su dominio va a tener un cero en el mismo: por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ es la función definida por $f(x) := 1/x$, vemos que f es continua en A, cambia de signo en A y no tiene ceros en A. Entonces, el Teorema de Bolzano es un enunciado sobre funciones continuas, pero también sobre funciones definidas sobre un **intervalo real**. ¿Cuál es **la característica de un intervalo** que hace que el Teorema de Bolzano se satisfaga? La de **contener a todos los puntos comprendidos entre dos puntos del mismo**. Esta propiedad de un conjunto de no estar "desconectado", que vamos a denominar **conexión**, es la característica que buscamos. Por otro lado, si bien el método de bisección restringe la situación al intervalo $[a_0, b_0]$ **cerrado y acotado** en donde la función cambia de signo, esto es esencialmente un producto del método (observar que los intervalos involucrados en el proceso de bisección I_n están todos contenidos en $[a_0, b_0] := I_0$), que no tiene un rol importante a efectos de establecer la validez del enunciado del Teorema.

Del Teorema de Bolzano se desprende la siguiente consecuencia, conocida generalmente como el Teorema de los valores intermedios.

Teorema 8.1.7 (Teorema de los valores intermedios)**.** *Sea I un intervalo real y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Si existen $a, b \in I$ y $d \in \mathbb{R}$ tales que $f(a) < d < f(b)$, entonces existe $c \in I$ tal que $f(c) = d$.*

[2] Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida sobre un intervalo real I se dice **convexa** si el segmento que une dos puntos cualesquiera del gráfico de f está por encima del gráfico de f. Más precisamente, f es convexa si $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ para cada par de puntos $x, y \in I$ y cada $0 \leq \alpha \leq 1$.

Demostración. Basta considerar la función $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - d$. Esta función es continua ya que es suma de dos funciones continuas. Por hipótesis, tenemos que $g(a) = f(a) - d < 0 < f(b) - d = g(d)$. Por lo tanto, el Teorema de Bolzano (Teorema 8.1.2) asegura que existe $c \in I$ tal que $g(c) = 0$, o equivalentemente, $f(c) = d$, como queríamos demostrar. □

Se podría pensar a primera vista que este enunciado es esencialmente el enunciado de Bolzano "corrido en d". Sin embargo, se trata de dos resultados **esencialmente distintos**, en el siguiente sentido: mientras que el Teorema de Bolzano garantiza la existencia de un **cero** de la función f en consideración, o lo que es lo mismo, asegura que la imagen de I por f contiene un valor **muy especial**, 0, el Teorema de los valores intermedios afirma que d pertenece a la imagen de I por f, donde d es **cualquier** número real comprendido entre dos elementos de la imagen de f, y por lo tanto, asegura que **todo** número real comprendido entre dos elementos de la imagen de I por f pertenece a ésta. En otras palabras, podemos interpretarlo como un resultado sobre la **estructura** de la imagen de I por f: la imagen de I por f es un **intervalo**. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 8.1.8 (Teorema de los valores intermedios – Versión topológica)**.** *Sea I un intervalo real y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces la imagen de I por f es un intervalo.*

Así, el Teorema de los valores intermedios toma la forma de un resultado sobre el comportamiento de funciones continuas definidas en un intervalo. Si pensamos en el gráfico de una función continua $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo I, podemos ver que esencialmente f "deforma" el intervalo en una curva sobre el plano. Lo que afirma el Teorema de los valores intermedios es que la "sombra" (la proyección) de dicha curva sobre el eje "y" resulta nuevamente un intervalo (ver la Figura 8.1), y tiene la forma típica de un resultado de **topología**: se trata de analizar cómo "transforma" una función continua a un conjunto dado.

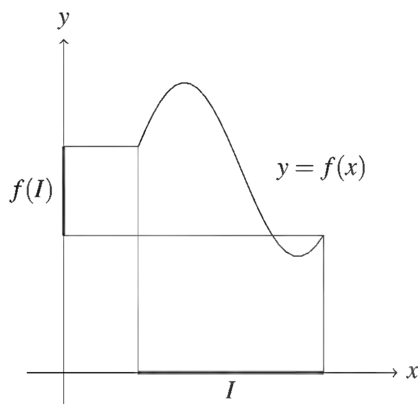


Figura 8.1.: La imagen por una función continua de un intervalo I.

Ejemplo 8.1.9. *Dado que la versión topológica del Teorema de los valores intermedios (Teorema 8.1.8) es un resultado sobre la "estructura" de la imagen de un intervalo por una función continua,*

resulta particularmente útil a fin de demostrar la suryectividad de funciones conocidas, como constatamos en el ejemplo a continuación.

Sea $p \in \mathbb{R}[X]$ un polinomio de grado impar. Afirmamos que la función polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es suryectiva. Una forma de ver esto es observar que la ecuación $p(x) = d$ tiene al menos una solución real para cada $d \in \mathbb{R}$, dado que $p(x) - d$ es un polinomio de grado impar, y por lo tanto, tiene al menos una raíz real (Ejemplo 7.4.5).

En lo que sigue vamos a dar una demostración alternativa de esta afirmación, que ilustra mejor la aplicación del Teorema de los valores intermedios. Para esto, del mismo modo que en la demostración de que todo polinomio de grado impar tiene una raíz real (Ejemplo 7.4.5), sin pérdida de generalidad podemos suponer que p es de la forma

$$p(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

con $n \in \mathbb{N}$ impar. Asimismo, en el transcurso de dicho ejemplo demostramos que, si definimos $M := \text{máx}\{1, |a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\}$, para $\alpha > 1 + M$ tenemos que

$$p(\alpha) \geq \frac{\alpha^n}{\alpha - 1}(\alpha - 1 - M) \geq \alpha - 1 - M \text{ y } p(-\alpha) \leq -\frac{\alpha^n}{\alpha - 1}(\alpha - 1 - M) \leq M + 1 - \alpha.$$

Sea $d \in \mathbb{R}$ y sea $\alpha_d := 1 + M + |d|$. Entonces $\alpha_d - M = 1 + |d| \geq |d|$, y por lo tanto,

$$p(-\alpha_d) \leq M + 1 - \alpha_d \leq -|d| \leq d \leq |d| \leq \alpha_d - 1 - M \leq p(\alpha_d).$$

El Teorema de los valores intermedios (Teorema 8.1.8) asegura que d pertenece a la imagen de p. Dado que d es un elemento arbitario de $\mathbb{R}$, concluimos que la función polinomial p es suryectiva, como queríamos probar.

Ejercicio 8.1.10. *Demostrar que la función polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^{2n+1}$ es biyectiva para cada $n \geq 0$.*

Ejercicio 8.1.11 (Teorema del valor medio integral discreto)**.** *Sea I un intervalo real y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son números reales positivos y $a_1, \ldots, a_n \in I$, entonces existe $c \in I$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i) = f(c) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.*

Ejercicio 8.1.12 (Conservación del promedio)**.** *Sea I un intervalo real, $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua, y sean $a, b \in I$ tales que $a < b$. Sea $h := (b - a)/3$.*

1. *Demostrar que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{3}\left(\frac{f(b) - f(a + 2h)}{h} + \frac{f(a + 2h) - f(a + h)}{h} + \frac{f(a + h) - f(a)}{h}\right).$$

2. *Demostrar que existe un intervalo $I_1 := [a_1, b_1] \subset I$ de longitud h tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1},$$

es decir, el "promedio" de f en $[a, b]$ se obtiene en un intervalo $[a_1, b_1]$ de longitud $(b -$

$a)/3$. (Sugerencia: *estudiar la función* $g : [a, a+2h] \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) := (f(x+h) - f(x))/h$.)

3. *Demostrar que existe una sucesión de intervalos cerrados, acotados y encajados* $(I_n)_{n>0}$ *cuya longitud tiende a 0, tales que, si* $I_n := [a_n, b_n]$, *entonces*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$$

para cada $n \geq 0$.

4. *Si* c *es el (único) punto de intersección de todos los intervalos* I_n *y* f *es derivable en* I, *¿qué se puede concluir de* $f'(c)$?

8.2. Existencia de extremos: el Teorema de Weierstrass

En esta sección consideramos el segundo de nuestros problemas modelo: el de la minimización de una función continua en un subconjunto de $\mathbb{R}$. Nuevamente, el objetivo es establecer condiciones que garanticen la existencia de tales mínimos. El resultado central de esta sección afirma que una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado alcanza necesariamente sus valores extremos (máximos y mínimos).

A fin de fijar terminología, dada una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremos que f **alcanza en** $\alpha \in A$ **su mínimo global** si $f(\alpha) \leq f(x)$ para cada $x \in A$, y **su máximo global** si $f(\alpha) \geq f(x)$ para cada $x \in A$. En ambos casos, diremos que f alcanza en $\alpha \in A$ un **extremo global**.

8.2.1. Sucesiones en intervalos cerrados y acotados

Dado que hemos definido la continuidad a partir de sucesiones, es fundamental comprender el comportamiento de sucesiones en intervalos cerrados y acotados, para lo cual necesitamos algunas herramientas que exponemos a continuación. Para el estudio de sucesiones en general, y sucesiones en intervalos cerrados y acotados en particular, vamos a estudiar subsucesiones de la sucesión en consideración. Una **subsucesión** de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o lo que es lo mismo, una estrategia de elección de una cantidad infinita de términos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respetando el orden de ésta). Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

Definición 8.2.1. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión. Dada una función estrictamente creciente* $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *la sucesión* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *definida por* $b_k := a_{n(k)}$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$ *se denomina una* **subsucesión** *de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y se representa por* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Ejemplo 8.2.2. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la sucesión definida por* $a_n := (-1)^n$. *Entonces las sucesiones* $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$, *formadas por los términos pares e impares de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *resultan subsucesiones de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Observamos que, si bien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no converge, las subsucesiones* $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ *sí convergen. Por otro lado,* $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ *no converge.*

El análisis de las subsucesiones de una sucesión nos provee de información importante sobre el comportamiento de la misma. En particular, tenemos el siguiente resultado.

Lema 8.2.3. *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathbb{R}$ que converge a $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces toda subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α.*

Demostración. Sea $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y sea $\varepsilon > 0$. Dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ para cada $n \geq N$. En particular, $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$ para cada $n_k \geq N$. Ahora bien, dado que $n_k \geq k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ concluimos que $n_k \geq N$ para cada $k \geq N$. Por lo tanto, $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$ para cada $k \geq N$, lo que demuestra que $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a α. □

Como hemos mencionado, nuestra intención es estudiar sucesiones en un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Por la Hipótesis 3 de completitud sabemos que una sucesión monótona de un intervalo cerrado y acotado I converge, dado que evidentemente resulta acotada. En lo que respecta a sucesiones en general, tenemos el siguiente resultado.

Lema 8.2.4. *Toda sucesión posee una subsucesión monótona.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria. Diremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un "mirador" en a_k si $a_k \geq a_n$ para todo $n \geq k$. Si existen infinitos miradores, entonces forman una sucesión monótona decreciente. Si no, existe el máximo de los índices $k_0 \in \mathbb{N}$ de los miradores, y definimos $k_0 := 1$ en caso de que no existan miradores. Sea $n_1 := k_0 + 1$. Dado que a_{n_1} no es un mirador, tenemos que existe $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} > a_{n_1}$. Ahora bien, a_{n_2} tampoco es un mirador, por lo que existe $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_3} > a_{n_2}$. Prosiguiendo de esta manera, obtenemos una subsucesión estrictamente creciente $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. □

El resultado clave sobre el comportamiento de sucesiones en intervalos cerrados y acotados es el siguiente teorema.

Teorema 8.2.5 (Teorema de Bolzano–Weierstrass). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de un intervalo real I cerrado y acotado. Entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente en I.*

Demostración. El Lema 8.2.4 afirma que existe una subsucesión monótona $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Los términos de esta subsucesión pertenecen al intervalo cerrado y acotado $I := [a,b]$, por lo que $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ resulta acotada. Así, la Hipótesis 3 de completitud asegura que $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\alpha \in \mathbb{R}$. Finalmente, por el principio de conservación del número (Lema 3.1.40) concluimos que $a \leq \alpha \leq b$, es decir, que $\alpha \in I$. □

Ejemplo 8.2.6. *Todos los términos de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por*

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

pertenecen al intervalo $[0,1]$. Por lo tanto, el Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 8.2.5) asegura que existen subsucesiones convergentes de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Explícitamente, la subsucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \dots$$

converge a 1.

Ejemplo 8.2.7. *Sea $a_1 \in \mathbb{R}$ el número real cuyo desarrollo decimal infinito admisible es de la forma $a_1 := 0.r_1r_2r_3\ldots$, y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por*

$$a_n := 0.r_nr_{n+1}r_{n+2}\ldots$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que cada término de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece al intervalo $[0,1]$, por lo que, de acuerdo con el Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 8.2.5), existen subsucesiones convergentes de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es fácil ver que si $a_1 \in \mathbb{Q}$, entonces la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es "cíclica", es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n+m} = a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, la subsucesión $(a_{mk})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente. De todas maneras, aun si $a_1 \notin \mathbb{Q}$, el Teorema de Bolzano–Weierstrass asegura la existencia de subsucesiones convergentes para cada $a_1 \in [0,1)$.

Ejercicio 8.2.8. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/(1+x^2)$ y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_{n+1} := f(a_n)$ para cada $n \geq 2$, comenzando en $a_1 \in \mathbb{R}$ arbitrario. Demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee subsucesiones convergentes.*

8.2.2. Existencia de extremos de funciones continuas

Ahora sí tenemos todas las herramientas necesarias para demostrar que una función continua definida sobre un intervalo real I cerrado y acotado alcanza su máximo y mínimo global en I. Para esto, comenzamos observando que la existencia de tales extremos solo es posible en el caso en que la función esté acotada en I. En efecto, si una función $f : I \to \mathbb{R}$ no está acotada superiormente, por caso, dado $a \in I$, su imagen $f(a)$ no puede ser una cota superior para la imagen de f, y por lo tanto, existe $b \in I$ tal que $f(b) > f(a)$, lo que demuestra que f no puede alcanzar su máximo en I. Tal es el caso, por ejemplo, de la función $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := 1/x$.

Nuestro primer resultado afirma que una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado está acotada.

Teorema 8.2.9. *Sea I un intervalo cerrado y acotado y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f resulta acotada.*

Demostración. Veamos que la imagen de I por f está acotada superiormente. Si no fuera así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existiría $a_n \in I$ tal que $f(a_n) > n$. Entonces la sucesión $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no estaría acotada superiormente, y por lo tanto, dado que toda sucesión convergente es acotada (Lema 3.1.28), no convergería. Por otro lado, siendo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión del intervalo cerrado y acotado I, del Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 8.2.5) concluimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a $\alpha \in I$. Dado que f es continua, concluimos que $(f(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\alpha)$, lo que contradice el hecho de que la sucesión $(f(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ no es acotada.

En forma análoga se demuestra que f está acotada inferiormente. □

Enunciamos a continuación el resultado principal de esta sección.

Teorema 8.2.10 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sea I un intervalo cerrado y acotado y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f alcanza su máximo y su mínimo en I, es decir, existen $\alpha, \beta \in I$ tales que $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ para todo $x \in I$.*

Demostración. Dado que la imagen de I por f es acotada, existen números reales, digamos A y B, que acotan inferior y superiormente a f sobre I, es decir, tales que $A \leq f(x) \leq B$ para todo $x \in I$. Demostramos que f alcanza su máximo en I por medio de un proceso de "bisección sobre la imagen".

Para esto, vamos a construir una sucesión de cotas superiores $(B_n)_{n>0}$ que refinan progresivamente a B, y convergen a una "cota superior óptima" de f sobre el intervalo I. Con la misma estrategia que en bisección, si $A_0 := A$ y $B_0 := B$, consideramos el punto medio $C_0 := (A_0 + B_0)/2$ del intervalo $[A_0, B_0]$, y analizamos cómo determinar un intervalo $[A_1, B_1] \subset [A_0, B_0]$ de forma tal que A_1 no sea cota superior de $f(I)$, B_1 sí lo sea y $B_1 - A_1 = (B_0 - A_0)/2$. Para esto, definimos $[A_1, B_1]$ como $[A_0, C_0]$ si C_0 es una cota superior para $f(I)$ y $[C_0, B_0]$ en caso contrario. De esta manera, en ambos casos tenemos que A_1 no es una cota superior para $f(I)$ y B_1 sí lo es.

Prosiguiendo de esta manera, obtenemos una sucesión de intervalos cerrados, acotados y encajados

$$[A_0, B_0] \supset [A_1, B_1] \supset \cdots$$

cuya longitud tiende a cero, en donde el extremo izquierdo A_n no es cota superior de $f(I)$ y el extremo derecho B_n sí lo es. En particular, tanto la sucesión $(A_n)_{n\geq 0}$ como $(B_n)_{n>0}$ resultan monótonas y acotadas (dados que sus términos pertenecen a $[A, B]$). Por lo tanto, la Hipótesis 3 de completitud asegura que resultan convergentes, y de hecho, dado que $\text{lím}_{n\to\infty}(A_n - B_n) = 0$, $(A_n)_{n>0}$ y $(B_n)_{n>0}$ convergen al mismo número real, digamos $\gamma \in \mathbb{R}$ (ver el Lema 6.2.1 y el Ejercicio 6.2.2).

Observamos en primer lugar que γ es una cota superior de $f(I)$, es decir, $\gamma \geq f(x)$ para cada $x \in I$. De hecho, dado $x \in I$, tenemos que $B_n \geq f(x)$ para cada $n \geq 0$. Por lo tanto, el principio de "conservación del número" (Lema 3.1.40) afirma que el límite γ de $(B_n)_{n>0}$ satisface la condición $\gamma \geq f(x)$.

Asimismo, afirmamos que $\gamma \in f(I)$, con lo que resultará el máximo de f en I que estamos buscando. A fin de demostrar esta afirmación, vamos a probar que γ es límite de una sucesión de elementos de $f(I)$, de lo cual vamos concluir que $\gamma \in f(I)$.

Dado que ningún A_n es cota superior de $f(I)$, tenemos que para cada $n \geq 0$ existe $a_n \in I$ tal que $A_n < f(a_n)$. A su vez, dado que B_n es cota superior de $f(I)$ para cada $n \geq 0$, tenemos que $A_n < f(a_n) \leq B_n$. Como las sucesiones $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(B_n)_{n>0}$ convergen a γ, la propiedad sandwich (Lema 3.1.35) asegura que $(f(a_n))_{n>0}$ converge a γ.

Ahora bien, como los términos de la sucesión $(a_n)_{n>0}$ pertenecen al intervalo cerrado y acotado I, por el Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 8.2.5) tenemos que existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $\beta \in I$. En consecuencia, la continuidad de f garantiza que $(f(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\beta)$. A su vez, $(f(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a γ, ya que es una subsucesión de una sucesión convergente a γ (Lema 8.2.3). Concluimos que $f(\beta) = \gamma$, lo cual demuestra la afirmación y completa la demostración. □

Ejemplo 8.2.11. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4 + x - 1$. Afirmamos que f alcanza su mínimo global en $\mathbb{R}$, esto es, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) \leq f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. En efecto, observamos que $f(1) = 1$*

y, si $|x| > 2$, *entonces*

$$f(x) = x^4 + x - 1 \geq |x|^4 - |x| - 1 > 2|x|^3 - |x| - 1 > 2|x| - |x| - 1 > 1. \qquad (8.1)$$

En consecuencia, si f *alcanza su mínimo global, debe hacerlo en el intervalo* $[-2,2]$, *dado que, si* $x \notin [-2,2]$, *entonces* $f(x) > f(1)$, *como hemos demostrado.*

El Teorema de Weierstrass (Teorema 8.2.10) asegura que f, *restringida al intervalo* $[-2,2]$, *alcanza su mínimo global en dicho intervalo, esto es, existe* $\alpha \in [-2,2]$ *tal que* $f(\alpha) \leq f(x)$ *para cada* $x \in [-2,2]$. *Afirmamos que* f *alcanza su mínimo global en* α. *En efecto, tenemos que*

- *si* $x \in [-2,2]$, *entonces* $f(\alpha) \leq f(x)$ *por la definición de* α;
- *si* $x \in \mathbb{R} \setminus [-2,2]$, *entonces* $f(\alpha) \leq f(1) = 1 < f(x)$ *por (8.1).*

Esto muestra que f *alcanza su mínimo global en* α. *A fin de determinar* α *observamos que* f *tiene un único punto crítico en* $(1/4)^{1/3}$. *Concluimos entonces que* $\alpha = (1/4)^{1/3}$.

Ejercicio 8.2.12 (Existencia de extremos globales)**.**

1. *Sea* $p \in \mathbb{R}[X]$ *un polinomio de grado par. Demostrar que la función definida por* p *posee un extremo (máximo o mínimo) global en* $\mathbb{R}$.
2. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función racional cuyo numerador tiene grado menor o igual que el del denominador, tal que el denominador no tiene raíces reales. Demostrar que* f *posee un extremo global en* $\mathbb{R}$.

8.2.3. Una versión topológica del Teorema de Weierstrass: compacidad

Es interesante repasar la demostración de los resultados sobre la acotación y la existencia de extremos globales de una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado (Teoremas 8.2.9 y 8.2.10). La propiedad esencial del intervalo I que garantiza la acotación de $f(I)$ es la expresada en el enunciado del Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 8.2.5): el hecho de que exista una subsucesión convergente de cualquier sucesión de I. Esto nos permite comenzar el proceso de "bisección sobre la imagen" de la demostración del Teorema de Weierstrass (Teorema 8.2.10) y obtener un "candidato" a máximo de $f(I)$: γ. Más aún, γ queda caracterizado como el límite de una sucesión de elementos de $f(I)$. Y aquí tenemos nuevamente un punto de la argumentación en el cual interviene de forma esencial la propiedad del enunciado del Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 8.2.5): dado que γ es límite de una sucesión de elementos de $f(I)$, se concluye que $\gamma \in f(I)$.

Un conjunto S con la propiedad de que **cada número real que es límite de una sucesión de elementos de** S **pertenece a** S es lo que vamos a denominar un conjunto **cerrado**. En particular, un intervalo con esta propiedad resulta un intervalo cerrado en el sentido usual, dado que debe necesariamente contener sus extremos izquierdo y derecho (si los hubiera). Por lo tanto, nuestra definición de conjunto "cerrado" resulta una buena generalización de lo que entendemos por "intervalo cerrado".

Ejemplo 8.2.13.

1. *El intervalo* $(0,1]$ *no es un conjunto cerrado: en efecto, consideremos la sucesión* $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Es claro que los términos de esta sucesión pertenecen al intervalo* $(0,1]$ *y* $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en* $\mathbb{R}$*, dado que converge a 0. Sin embargo,* $0 \notin (0,1]$*, con lo cual concluimos que el intervalo* $(0,1]$ *no es cerrado.*

2. *El intervalo* $[1,+\infty)$ *sí es cerrado, ya que, dada una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $[1,+\infty)$ *que converge a* $\alpha \in \mathbb{R}$*, tenemos que* $1 \leq a_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*, de lo cual, por el principio de conservación del número (Lema 3.1.40), deducimos que* $1 \leq \alpha$*, es decir, que* $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \in [1,+\infty)$.

3. *El conjunto* $\{0,1\}$ *es un conjunto cerrado: si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión convergente con* $a_n \in \{0,1\}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*, entonces debe resultar* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *constante para* $n \geq n_0$*. En consecuencia, el límite de dicha sucesión debe ser 0 o 1, y por lo tanto pertenece a* $\{0,1\}$.

Ejercicio 8.2.14.

1. *Demostrar que todo conjunto finito de* $\mathbb{R}$ *es cerrado.*

2. *Dar ejemplos de conjuntos infinitos cerrados de* $\mathbb{R}$*, que no sean intervalos.*

3. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de conjuntos cerrados de* $\mathbb{R}$*, demostrar que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *es un conjunto cerrado. ¿Qué puede decirse de* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$*? ¿Y de* $\bigcup_{1<n<n_0} A_n$*?*

Ejercicio 8.2.15. *Sea* $S := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots \text{ con } a_i \in \{5,7\} \text{ para todo } i \geq 0\}$*. Demostrar que S es cerrado.* (Sugerencia: utilizar el resultado sobre la estabilización del desarrollo decimal en una sucesión de Cauchy (Teorema 4.3.6).)

La noción de compacidad

De nuestra discusión previa vemos que, en definitiva, la propiedad crucial del dominio I de una función continua $f : I \to \mathbb{R}$ que hace que ésta resulte acotada (Teorema 8.2.9) y alcance sus extremos globales en I (Teorema 8.2.10), es la que expresa el enunciado del Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 8.2.5): la existencia de una subsucesión convergente de cada sucesión de I. Esto nos permitió demostrar que:

- $f(I)$ es un conjunto acotado,
- $f(I)$ es un conjunto cerrado.

Un subconjunto de $\mathbb{R}$ con estas dos propiedades se denomina **compacto**. Más aún, estas dos propiedades caracterizan a su vez a los conjuntos S para los cuales toda sucesión posee una subsucesión convergente, o, dicho de otro modo, un subconjunto de $\mathbb{R}$ es **compacto si y solo si toda sucesión de** S **posee una subsucesión convergente** en S.

Lema 8.2.16 (Compacidad en términos de sucesiones)**.** *Si S es un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}$*, entonces toda sucesión de S posee una subsucesión convergente en S. Recíprocamente, un subconjunto S de* $\mathbb{R}$ *tal que toda sucesión de S posee una subsucesión convergente es compacto.*

Demostración. Sea $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de S. Dado que toda sucesión posee una subsucesión monótona (Lema 8.2.4), tenemos que existe una subsucesión monótona $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como S es acotado, $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ resulta acotada, y por ende, la Hipótesis 3 de completitud asegura que converge a $\alpha \in \mathbb{R}$. Finalmente, dado que S es cerrado y α límite de una sucesión de S, concluimos que $\alpha \in S$.

Consideramos ahora la afirmación recíproca. Sea $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto tal que cada sucesión de S posee una subsucesión convergente en S. Si S no fuera cerrado, entonces existiría una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S que converge a un elemento $\alpha \in \mathbb{R}\setminus S$. Por lo tanto, dado que toda subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α, ninguna converge en S, lo que contradice la definición de S. Por otro lado, si S no fuera acotado, existiría una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S tal que $|a_n| > n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo cual ninguna subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergería en S, contradiciendo nuevamente la definición de S. □

Ejemplo 8.2.17. *El intervalo $[1,+\infty)$ no es compacto, ya que, si consideramos, por ejemplo, la sucesión "identidad" $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, vemos que se trata de una sucesión con límite infinito cuyos términos pertenecen a $[1,+\infty)$. Ahora bien, la sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ no puede poseer subsucesiones convergentes, dado que, por definición, ninguna subsucesión de $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.*

Ejemplo 8.2.18. *El conjunto $\{0,1\}$ es compacto, dado que en el Ejemplo 8.2.13 hemos visto que es cerrado, y por otro lado es evidentemente acotado. Por otro lado, podemos observar directamente que $\{0,1\}$ satisface la caracterización de la compacidad en términos de sucesiones (Lema 8.2.4): si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\{0,1\}$, entonces, o bien infinitos términos a_n toman el valor 0, en cuyo caso forman una subsucesión convergente a $0 \in \{0,1\}$, o bien infinitos términos a_n toman el valor 1, y por lo tanto, tenemos una subsucesión convergente a $1 \in \{0,1\}$.*

Ejercicio 8.2.19.

1. *Demostrar que todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ es compacto.*
2. *Demostrar que el conjunto $\{0\}\cup\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto.*
3. *Más generalmente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathbb{R}$ que converge a $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\{\alpha\}\cup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto.*

Ejercicio 8.2.20. *Sea $S := \{a \in [0,1] : a = a_0,a_1a_2\ldots \text{ con } a_i \in \{5,7\} \text{ para todo } i \geq 0\}$. Demostrar que S es compacto.*

El Teorema de Weierstrass y la compacidad

Con la noción de compacidad, el Teorema de Weierstrass toma la forma de un resultado de caracterización del comportamiento de las funciones continuas, es decir, un resultado topológico: la imagen por una función continua de un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ resulta un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

Teorema 8.2.21 (Teorema de Weierstrass – Versión Topológica)**.** *Sea $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y $f : S \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces la imagen por f de S resulta un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.*

Idea de la demostración. Dado que S es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, por la caracterización de la compacidad en términos de sucesiones (Lema 8.2.16) concluimos que S satisface la propiedad del enunciado del Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 8.2.5): toda sucesión de S posee una subsucesión convergente en S. Por lo tanto, con la misma demostración del Teorema 8.2.9 resulta $f(S)$ acotado.

Por otro lado, sea β el límite de una sucesión $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $f(S)$. El Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 8.2.5) asegura que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $\alpha \in S$. Por lo tanto, la sucesión $(f(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\alpha)$, por ser f continua, y a β, por tratarse de una subsucesión de una sucesión convergente a β. Concluimos que $f(\alpha) = \beta$, y por ende, que $\beta \in S$. Esto demuestra que $f(S)$ es cerrado. □

Ejercicio 8.2.22 (Existencia de puntos fijos "revisitada"). *Sea S un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y $f : S \to S$ una función continua que satisface la condición*

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

para cada par de puntos distintos $x, y \in S$. El objetivo del ejercicio es demostrar que f posee un único punto fijo en S, es decir, $\alpha \in S$ tal que $f(\alpha) = \alpha$, y que éste puede ser aproximado mediante la sucesión $(a_n)_{n>0}$ definida por $a_{n+1} := f(a_n)$, comenzando en cualquier punto $a_0 \in S$.

1. *Demostrar que si $\alpha, \beta \in S$ son puntos fijos de f, entonces $\alpha = \beta$.* (Sugerencia: comparar $|\alpha - \beta|$ con $|f(\alpha) - f(\beta)|$.)

2. *Sea $a_0 \in S$ arbitrario y $(a_n)_{n>0}$ definida por $a_{n+1} := f(a_n)$ para cada $n \geq 0$. Supongamos que ningún a_n es un punto fijo de f.*

   a) *Demostrar que $|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}|$ para cada $n \geq 1$. Concluir que $(|a_{n+1} - a_n|)_{n>0}$ converge a $c \geq 0$.*

   b) *Si $c = 0$, concluir que $(a_n)_{n>0}$ converge a un punto fijo de f en S.*

   c) *Supongamos que $c > 0$ y sea $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a $\alpha \in S$. Demostrar que $(a_{n_k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\beta := f(\alpha)$ y $(a_{n_k+2})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\beta)$.*

   d) *Demostrar que $|\alpha - \beta| = c = |\beta - f(\beta)|$. Concluir que $c = 0$.*

8.2.A. Apéndice. Un algoritmo de minimización

En nuestra discusión sobre la solución de una ecuación del tipo $f(x) = 0$ (Sección 8.1) hemos demostrado un resultado de existencia de carácter general, el Teorema de Bolzano (Teorema 8.1.1 o 8.1.2), a la vez que **hemos proporcionado un método efectivo** para calcular la solución cuya existencia hemos asegurado: el **método de bisección**.

No hemos procedido de la misma manera en el caso del problema de minimización $\min_{x\in S} f(x)$, donde S es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y $f : S \to \mathbb{R}$ es una función continua. Si bien el Teorema de Weierstrass (Teorema 8.2.10 o 8.2.21) asegura la existencia de un mínimo global de f en S, su demostración procede por un proceso de "bisección sobre la imagen" $f(S)$ que **no es efectivo**, es decir, no se puede realizar en la práctica con una función continua f arbitraria. El propósito de este

apéndice es discutir un **método efectivo para minimizar una clase de funciones continuas** definidas sobre un intervalo compacto, las llamadas funciones "unimodales", cuyo comportamiento en relación con la minimización es particularmente favorable. Cabe destacar que existen métodos generales efectivos (y eficientes) para la minimización de funciones continuas que no vamos a considerar aquí, debido a que su complejidad nos apartaría demasiado de los temas en consideración (con relación a esta temática puede consultarse [Bre73]).

Funciones unimodales

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si f es diferenciable y alcanza su mínimo en un punto interior α del intervalo $[a,b]$, entonces, como vamos a ver cuando estudiemos funciones diferenciables (Sección 11.1.1), tenemos que $f'(\alpha) = 0$. En tal caso, podemos reducir el problema de la determinación de un punto en el cual f alcanza su mínimo global al de la búsqueda de soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, para lo cual podemos, por ejemplo, aplicar el método de bisección.

Si la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en consideración no es derivable en (a,b), o es difícil o costoso calcular su derivada, entonces no es posible o conveniente determinar las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, y por lo tanto es necesario disponer de métodos alternativos de búsqueda del mínimo (o el máximo) de f en $[a,b]$ que utilicen solamente valores de f. Más precisamente, nos interesan métodos, del tipo de bisección, que reduzcan la posible ubicación del punto de $[a,b]$ en donde f alcanza su mínimo a intervalos progresivamente menores, por medio de la **evaluación de f en puntos de $[a,b]$** elegidos adecuadamente.

Si f alcanza dicho mínimo en más de un punto del intervalo $[a,b]$, la búsqueda se torna más dificultosa, por lo que vamos a restringir nuestras consideraciones a una clase particular de funciones f, las funciones unimodales, en las cuales **el mínimo global se alcanza en un solo punto** del intervalo $[a,b]$.

Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice **unimodal** si existe $\alpha \in [a,b]$ tal que, para cada par de puntos $c,d \in [a,b]$ con $c < d$, tenemos que

$$f(c) > f(d) \text{ si } c,d \in [a,\alpha] \quad \text{y} \quad f(c) < f(d) \text{ si } c,d \in [\alpha,b].$$

En otras palabras, f es unimodal si existe $\alpha \in [a,b]$ tal que f es estrictamente decreciente en $[a,\alpha]$ y estrictamente creciente en $[\alpha,b]$.

Ejemplo 8.2.23. *La función $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ es unimodal para cada $a > 0$.*

Ejemplo 8.2.24. *Sea $g : [-1,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^3 - 6x$. Recordamos que estudiamos los mínimos locales de g en la Sección 2.3, donde observamos que los mismos son soluciones de la ecuación $x^2 = 2$. Es fácil ver que g es unimodal: dado que $g'(x) = 3(x^2 - 2)$, deducimos que g es estrictamente decreciente en el intervalo $[-1,\sqrt{2}]$ y estrictamente creciente en el intervalo $[\sqrt{2},3]$ (ver la Figura 8.2).*

Una observación inmediata es que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es unimodal y $\alpha \in [a,b]$ es el punto cuya existencia asegura la definición, entonces α **es el único punto de $[a,b]$ en el cual f alcanza su mínimo absoluto**.

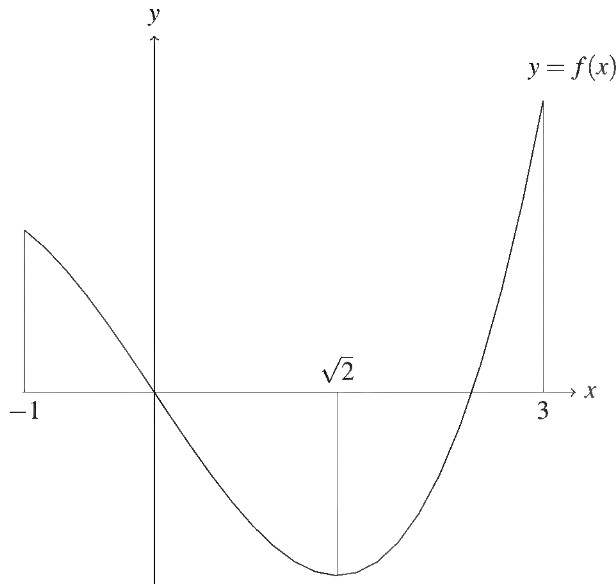


Figura 8.2.: El gráfico de la función unimodal $g : [-1,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^3 - 6x$.

Un algoritmo de búsqueda para funciones unimodales: búsqueda por razón áurea

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función unimodal. Consideramos ahora una estrategia de búsqueda del mínimo absoluto α de f en $[a,b]$, esto es, una estrategia de reducción del intervalo en el cual se encuentra α. Seguimos aquí [DB08, Section 6.4.2].

La estrategia de búsqueda se basa en comparar valores de f en puntos interiores del intervalo $[a,b]$. Sean c y d dos puntos de $[a,b]$ tales que $c < d$. Tenemos entonces que

$$f(c) \geq f(d) \text{ o } f(c) < f(d).$$

Supongamos que $f(c) \geq f(d)$. Afirmamos que necesariamente debe encontrarse α en el intervalo $[c,b]$. En efecto, de no ser así, tendríamos que $\alpha < c$, y en tal caso, de acuerdo con la condición de unimodalidad, resultaría f estrictamente creciente en el intervalo $[c,d] \subset [\alpha,b]$, de lo que concluiríamos que $f(c) < f(d)$. Similarmente, si $f(c) < f(d)$, entonces necesariamente $\alpha \in [a,d]$ ya que, de no ser así, sería $\alpha > d$ y por lo tanto f sería estrictamente decreciente en el intervalo $[c,d] \subset [a,\alpha]$. Esto contradice la condición $f(c) < f(d)$. En resumen, tenemos el siguiente resultado.

Lema 8.2.25. *Sean c,d dos puntos del intervalo $[a,b]$ con $c < d$. Entonces*

$$\alpha \in \begin{cases} [c,b] & si\ f(c) \geq f(d), \\ [a,d] & si\ f(c) < f(d). \end{cases} \tag{8.2}$$

A partir de este resultado vemos que, a partir de dos evaluaciones de la función f, encerramos el

punto α, donde f alcanza su mínimo global, en un intervalo de longitud a lo sumo $\max\{b-c, d-a\}$. No conociendo dónde f alcanza dicho máximo, una elección óptima de c y d es una en la cual $b-c = d-a$. En consecuencia, tenemos que $c+d = a+b$, y por lo tanto, podemos expresar a c y d en la forma

$$c = a+t(b-a), \quad d = b-t(b-a), \quad \text{con } 0 < t < 1/2. \tag{8.3}$$

Así, el intervalo resultante tiene longitud $d-a = b-c = (1-t)(b-a)$, y eligiendo $t \approx 1/2$ (no podemos elegir $t = 1/2$ dado que tendríamos $c = d$) reducimos la longitud del intervalo de búsqueda a la mitad del intervalo original aproximadamente.

Sin embargo, esta estrategia requiere que **evaluemos dos veces la función f en cada paso**. A fin de **reducir la cantidad de evaluaciones** de f por paso, una idea es reutilizar las evaluaciones anteriores, es decir, utilizar la evaluación $f(d)$ si nos quedamos con el intervalo $[c,b]$ o utilizar la evaluación $f(c)$ si elegimos el intervalo $[a,d]$.

Supongamos que elegimos el intervalo $[c,b]$. De acuerdo con (8.3), en la segunda etapa de nuestra estrategia de búsqueda deberíamos evaluar a f en los puntos

$$c_1 := c+t(b-c) = c+t(1-t)(b-a) \ \text{ y } \ d_1 := b-t(b-c) = b-t(1-t)(b-a).$$

Es fácil ver que $c_1 = d$ si y solo si $(1-t)(b-a) = t(2-t)(b-a)$, es decir, si $1-t = t(2-t)$, de lo cual, teniendo en cuenta $t < 1/2$, concluimos que $t = (3-\sqrt{5})/2$. Con esta elección de t, el tamaño del siguiente intervalo se reduce en un factor

$$1-t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \approx 0{,}61803.$$

Éste es un conocido número, el inverso multiplicativo del **número áureo**, por lo que la correspondiente estrategia de búsqueda se denomina la **búsqueda por razón áurea**.

En resumen, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es unimodal y alcanza su mínimo global en α, la búsqueda por razón áurea produce una sucesión $(I_n)_{n>0} := ([a_n, b_n])_{n>0}$ de intervalos cerrados, acotados y encajados con las siguientes propiedades:

- $b_n - a_n = \left(\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n (b-a)$ para cada $n \geq 0$;
- $\alpha \in I_n$ para cada $n \geq 0$.

De la hipótesis 2 de completitud, deducimos el siguiente resultado.

Teorema 8.2.26. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ unimodal que alcanza su mínimo global en α, y sea $(I_n)_{n>0}$ la sucesión de intervalos que produce la búsqueda por razón áurea. Entonces*

$$\bigcap_{n>0} I_n = \{\alpha\}.$$

Ejemplo 8.2.27 (Continuación del Ejemplo 8.2.24)**.** *A fin de ejemplificar el método de búsqueda por áurea, estudiemos su aplicación a la función $g : [-1,3] \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^3 - 6x$ del Ejemplo 8.2.24, que alcanza su mínimo global en $x = \sqrt{2}$.*

Tabla 8.1.: El método de búsqueda por razón áurea aplicado a $g(x) := x^3 - 6x$.

n	a_n	b_n	c_n	d_n
0	−1,000000000	3,000000000	0,527864048	1,472135952
1	0,527864048	3,000000000	1,472135959	2,055728089
2	0,527864048	2,055728089	1,111456183	1,472135954
3	1,111456183	2,055728089	1,472135957	1,695048315
4	1,111456183	1,695048315	1,334368542	1,472135956
5	1,334368542	1,695048315	1,472135956	1,557280900
6	1,334368542	1,557280900	1,419513486	1,472135956
7	1,334368542	1,472135956	1,386991012	1,419513486
8	1,386991012	1,472135956	1,419513487	1,439613481
9	1,386991012	1,439613481	1,407091007	1,419513486
10	1,407091007	1,439613481	1,419513487	1,427191001

Tenemos que $I_0 := [a_0, b_0] := [-1, 3]$. *Los puntos en los que vamos a evaluar a g son*

$$c_0 := a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0) = -1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} 4 \approx 0{,}527864048$$

$$d_0 := b_0 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0) = 3 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} 4 \approx 1{,}472135952.$$

El siguiente paso es comparar $g(c_0)$ *con* $g(d_0)$, *a efectos de determinar cuál de los intervalos* $[a_0, d_0]$ *o* $[c_0, b_0]$ *vamos a considerar para el siguiente paso. Dado que*

$$g(c_0) \approx -5{,}642425847 \geq g(d_0) \approx -5{,}656137544,$$

de acuerdo con (8.2) definimos $I_1 := [a_1, b_1] := [c_0, b_0]$. *Prosiguiendo de esta manera, obtenemos una sucesión de intervalos cerrados y encajados cuya intersección consiste exactamente del único punto del intervalo* I_0, *es decir* $\sqrt{2}$, *donde g su alcanza su mínimo global. En la Tabla 8.1 listamos los intervalos* $I_n := [a_n, b_n]$ *para* $n = 0, \ldots, 10$.

8.3. Existencia de estados de equilibrio: el Teorema de Punto Fijo

Consideramos por último con toda generalidad el tercer problema modelo, el de la determinación de los estados de “equilibrio”. Supongamos que tenemos un “proceso”, descripto por una “ley de transformación” $x \mapsto f(x)$ de un “estado” x en otro $f(x)$. En este contexto, una cuestión relevante es la que refiere a la existencia de estados de “equilibrio”, es decir, estados α tales que $f(\alpha) = \alpha$ (ver [Str86] o [Str88] por un marco general para problemas de equilibrio).

En términos matemáticos, si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, un punto $\alpha \in A$ tal que $f(\alpha) = \alpha$ se denomina un **punto fijo** de f. Geométricamente, dado que cada punto fijo α de f es una solución

de la ecuación $f(x) = x$, los puntos fijos de f corresponden a puntos donde el gráfico de f interseca a la recta $y = x$ (ver la Figura 8.3).

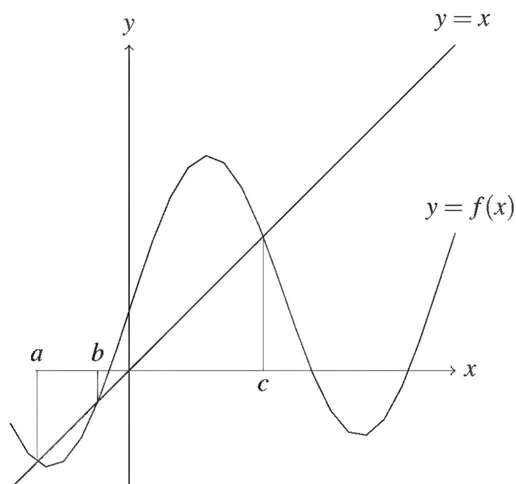


Figura 8.3.: Tres puntos fijos a, b, c de una función f.

8.3.1. Un caso de estudio

Supongamos, para fijar ideas, que queremos determinar los puntos fijos de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \cos x$. En primer lugar observamos que, si $\alpha \in \mathbb{R}$ es un punto fijo de f, entonces $\alpha = \cos\alpha$, lo cual implica necesariamente que $\alpha \in [-1, 1]$. Gráficamente, vemos que existe un único punto fijo $\alpha \in [-1, 1]$ de f (ver la Figura 8.4).

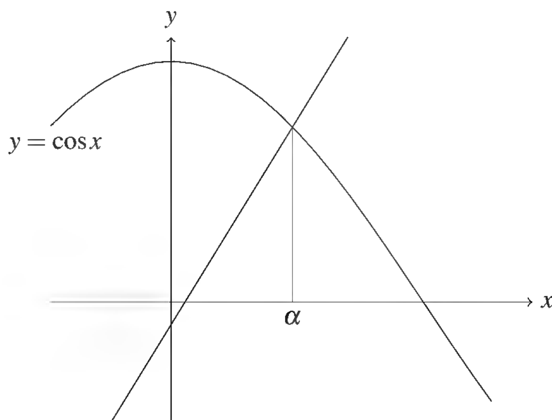


Figura 8.4.: El punto fijo $\alpha \approx 0{,}7390851332\ldots$ de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \cos x$.

Admitiendo por el momento la existencia del punto fijo α de f, discutimos cómo podemos aproximarlo, para lo cual vamos a utilizar la **iteración de punto fijo**. Teniendo en cuenta que $\alpha \in [0,1]$, comenzamos con la "aproximación" de α definida por $a_0 := 1$. Observamos que una mejor aproximación de α es la definida por

$$a_1 := f(a_0) = \cos(1) \approx 0{,}5403023059.$$

En efecto, por el Teorema del valor medio (Teorema 0.3.2) tenemos que

$$|a_1 - \alpha| = |\cos a_0 - \cos \alpha| = |\operatorname{sen} \xi_0||a_0 - \alpha| \leq |\operatorname{sen} 1||a_0 - \alpha|,$$

donde ξ_0 es un punto en el intervalo $[\alpha, a_0] \subset [-1,1]$. Esta acotación constituye el núcleo central de nuestros argumentos, dado que nos sugiere cómo obtenemos estimaciones progresivamente mejores de α: si definimos

$$a_2 := f(a_1) = \cos a_1 \approx 0{,}8575532158,$$

y llamamos $L := \operatorname{sen} 1$, entonces

$$|a_2 - \alpha| = |\cos a_1 - \cos \alpha| = |\operatorname{sen} \xi_1||a_1 - \alpha| \leq L|a_1 - \alpha| \leq L^2|a_0 - \alpha|.$$

Prosiguiendo de esta manera, obtenemos la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por $a_0 := 1$, $a_{n+1} = \cos a_n$ $(n \geq 0)$. Cada término de esta sucesión satisface la desigualdad

$$|a_n - \alpha| \leq L^n |a_0 - \alpha|.$$

Dado que $0 \leq L < 1$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0$, y por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

En la Tabla 8.2 listamos algunos de los términos de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

De todas maneras, nuestro argumento previo se basa de manera esencial en una hipótesis de la cual solo tenemos evidencia empírica: la existencia de un punto fijo de la función f. A fin de solucionar este inconveniente, observamos que, aun sin suponer la existencia de un punto fijo α de f, la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ que hemos definido converge. En efecto, tenemos que

$$|a_{n+1} - a_n| = |\cos a_n - \cos a_{n-1}| = |\operatorname{sen} \xi_n||a_n - a_{n-1}| \leq L|a_n - a_{n-1}|.$$

En consecuencia, aplicando sucesivamente esta estimación deducimos que

$$|a_{n+1} - a_n| \leq L|a_n - a_{n-1}| \leq L^2|a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \cdots \leq L^n|a_1 - a_0|$$

para cada $n \geq 0$. Así, dado que $0 \leq L < 1$, el valor absoluto $|a_{n+1} - a_n|$ de la diferencia entre los términos sucesivos de la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ decrece exponencialmente, por lo que ésta resulta una sucesión de Cauchy (Lema 3.3.8). En consecuencia, la Hipótesis 1 de completitud de $\mathbb{R}$ asegura

Tabla 8.2.: La iteración de punto fijo aplicada a $\cos x = x$.

n	a_n	$\|a_n - \alpha\|$
0	1.0000000000	0.2609148668
1	0.5403023059	0.1987828273
2	0.8575532158	0.1184680826
3	0.6542897905	0.0847953427
5	0.7013687737	0.0377163595
7	0.7221024250	0.0169827082
10	0.7442373549	0.0051522217
15	0.7383692041	0.0007159291
20	0.7391843998	0.0000992666
30	0.7390870427	0.0000019095
50	0.7390851340	0.0000000008

que $(a_n)_{n>0}$ converge. Más aún, si denominamos α al límite de $(a_n)_{n>0}$, tenemos que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \cos a_n = \cos\alpha, \tag{8.4}$$

de donde deducimos la existencia del punto fijo α de f que habíamos dada por supuesta en nuestros argumentos previos. Por último, observamos que f no tiene otro punto fijo, ya que si $\alpha, \beta \in [-1,1]$ son puntos fijos de f, entonces

$$|\alpha-\beta| = |\cos\alpha - \cos\beta| = |\operatorname{sen}\xi||\alpha-\beta| \leq L|\alpha-\beta|,$$

lo cual solo puede ocurrir si $|\alpha-\beta| = 0$. En resumen, tenemos el siguiente resultado.

Lema 8.3.1. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) := \cos x$ y $(a_n)_{n>0}$ la sucesión definida por $a_0 := 1$, $a_{n+1} := f(a_n)$ $(n \geq 0)$. Entonces*

- *f tiene un único punto fijo α;*
- *la sucesión $(a_n)_{n>0}$ converge a α.*

Ejercicio 8.3.2. *Demostrar que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_{n+1} = \cos(a_n)$ $(n \geq 0)$ converge al punto fijo α de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) := \cos x$ para cualquier $a_0 \in [-1,1]$.*

Ejercicio 8.3.3. *Demostrar que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_{n+1} = \cos(a_n)$ $(n \geq 0)$ converge al punto fijo α de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) := \cos x$ para cualquier $a_0 \in \mathbb{R}$.* (Sugerencia: tener en cuenta que $a_1 \in [-1,1]$.)

8.3.2. El caso general: funciones contractivas

La discusión previa nos sugiere una estrategia de carácter general para tratar con problemas de equilibrio. Una primera conclusión es que, dado que se trata de determinar "estados de equilibrio",

el "dejar que el sistema evolucione" puede darnos información sobre dichos estados de equilibrio. En efecto, en el caso de la función $f : [-1,1] \to [-1,1]$, $f(x) := \cos x$, nuestros argumentos se basaron en el estudio de la sucesión $(a_n)_{n>0}$ definida por $a_{n+1} := f(a_n)$. Como hemos mencionado, el cálculo de los términos sucesivos de una sucesión $(a_n)_{n>0}$ de la forma $a_{n+1} := g(a_n)$ constituye un método general de resolución de la ecuación $g(x) = x$, denominada la **iteración de punto fijo**. Con los mismos argumentos que en (8.4) vemos que, si la sucesión $(a_n)_{n>0}$ converge, su límite es necesariamente una solución de la ecuación $g(x) = x$.

La existencia de puntos fijos de una función g se reduce entonces a la convergencia de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forma $a_{n+1} := g(a_n)$. En tal sentido, observamos que la diferencia entre dos términos sucesivos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de la forma

$$a_{n+1} - a_n = g(a_n) - g(a_{n-1}).$$

Como hemos visto en el caso de la función f de la sección precedente, una condición **suficiente** de convergencia de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es que el decrecimiento de la misma sea de tipo "exponencial", es decir, $|a_{n+1} - a_n| \le L|a_n - a_{n-1}|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, siendo $0 \le L < 1$, en cuyo caso podemos garantizar la existencia de un (único) punto fijo de g. Una clase de funciones en las que esta condición se satisface es la de las funciones contractivas, que definimos a continuación.

Definición 8.3.4. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ y sea $g : A \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que g es* **contractiva** *si existe $0 \le L < 1$ tal que*

$$|g(x) - g(y)| \le L|x - y|$$

para cada par de puntos x, y de A.

Ejemplo 8.3.5. *La función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \cos x$ es contractiva. En efecto, si $x, y \in [-1,1]$, entonces*

$$|\cos x - \cos y| = |\operatorname{sen} \xi||x - y| \le \operatorname{sen} 1|x - y|.$$

Ejemplo 8.3.6. *La función $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$ es contractiva en $[1,+\infty)$ y no lo es en $[0,1]$. En efecto, si $x, y \in [1,+\infty)$, tenemos que*

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le \frac{1}{2}|x-y|.$$

Por otro lado, si $x \in (0,1]$, tenemos que

$$\left|\sqrt{x} - 0\right| = \frac{|x-0|}{\sqrt{x}} > |x-0|,$$

lo que demuestra que f no es contractiva en $[0,1]$.

Ejercicio 8.3.7. *Probar que la función $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x/2 + 1/x$ es contractiva en $[1,2]$. Más generalmente, si $a > 0$, demostrar que la función $g_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $g_a(x) := x/2 + a/2x$ es contractiva en $\left[\sqrt{a/2}, a\right]$.*

Una observación que vamos a necesitar en lo que sigue es el siguiente resultado.

Lema 8.3.8. *Una función contractiva es continua.*

Demostración. Sea $g : A \to A$ es una función contractiva y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de A que converge a $\alpha \in A$. Queremos ver que

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(\alpha).$$

Sea $0 \leq L < 1$ la constante cuya existencia asegura el hecho de que g es contractiva. Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. En consecuencia,

$$|g(a_n) - g(\alpha)| \leq L|a_n - \alpha| \leq |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

si $n \geq n_0$. Concluimos entonces que g es continua. □

En estos términos, tenemos el siguiente resultado constructivo de existencia de puntos fijos para funciones contractivas.

Teorema 8.3.9 (Teorema de Punto Fijo). *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y $g : A \to A$ una función contractiva. Entonces las siguientes afirmaciones son válidas:*

- *existe un único punto fijo $\alpha \in A$ de g,*
- *para cada $a_0 \in A$, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_{n+1} := g(a_n)$ converge a α.*

Insistimos con el carácter constructivo del enunciado: no se trata solamente de un resultado de existencia y unicidad de puntos fijos, sino que también nos provee una herramienta **efectiva** para aproximar el punto cuya existencia asegura: la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del enunciado, comenzando en un punto **arbitrario** $a_0 \in A$.

Demostración. Vamos a demostrar que, comenzando en $a_0 \in A$ arbitrario, la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del enunciado converge en A. Posteriormente vamos a deducir que $(a_n)_{n>0}$ converge necesariamente a un punto fijo α de g en A, de lo cual en particular vamos a concluir la existencia de dicho punto fijo.

Fijemos entonces $a_0 \in A$. Observamos que la diferencia $|a_{n+1} - a_n|$ decrece en forma exponencial. En efecto, dado que la función g es contractiva, tenemos que

$$|a_{n+1} - a_n| = |g(a_n) - g(a_{n-1})| \leq L|a_n - a_{n-1}|.$$

En consecuencia, mediante un argumento inductivo se deduce la siguiente acotación:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq L|a_n - a_{n-1}| \leq L^2|a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \cdots \leq L^n|a_1 - a_0|.$$

Este decrecimiento exponencial de las diferencias $|a_{n+1} - a_n|$ implica que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ es de Cauchy (Lema 3.3.8). Por lo tanto, la Hipótesis 1 de completitud asegura que $(a_n)_{n>0}$ converge a $\alpha \in \mathbb{R}$. Más aún, $\alpha \in A$ ya que A es cerrado y $(a_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de A. Finalmente, dado que g es continua (Lema 8.3.8), vemos que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(\alpha),$$

de lo cual concluimos que α es un punto fijo de g.

Resta demostrar que existe un único punto fijo de g en A. Para esto, supongamos que $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ son dos puntos fijos de g. Entonces

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |g(\alpha_1) - g(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2|,$$

de donde concluimos que

$$0 \leq |\alpha_1 - \alpha_2|(1 - L) \leq 0,$$

es decir, $|\alpha_1 - \alpha_2|(1 - L) = 0$. Dado que $1 - L > 0$, resulta $|\alpha_1 - \alpha_2| = 0$, o sea, $\alpha_1 = \alpha_2$, como queríamos demostrar. □

Es interesante comparar el enunciado del Teorema de punto fijo con el del Ejercicio 8.2.22: si $S \subset \mathbb{R}$ es compacto y $f : S \to S$ satisface la condición $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para cada $x, y \in S$ con $x \neq y$, entonces valen las mismas conclusiones que en el Teorema de punto fijo. En tal sentido, cabe destacar que, con las hipótesis del Teorema de punto fijo, resulta $|a_{n+1} - \alpha| = |g(a_n) - g(\alpha)| \leq L|a_n - \alpha|$ para cada $n \geq 0$, es decir, **el error en el n–ésimo paso de iteración "decae" de forma exponencial**. En el caso del Ejercicio 8.2.22, si bien las conclusiones son las mismas que en el Teorema de punto fijo, no podemos asegurar que la velocidad de convergencia de la correspondiente sucesión al punto fijo cuya existencia y unicidad se garantiza sea de este tipo. En la siguiente sección vamos a introducir un concepto que nos va a permitir comparar la velocidad de convergencia de dos sucesiones dadas: el orden de convergencia.

Ejemplo 8.3.10. *Analizamos la existencia de puntos fijos de la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ *en el intervalo* $[0, 1]$. *Para esto, vemos que se satisfacen las hipótesis del Teorema de punto fijo:*

- f *es contractiva en* $[0, 1]$, *ya que, si* $x, y \in [0, 1]$, *entonces*

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{x^2 - y^2}{4} - \frac{3(x - y)}{4} \right| = |x - y| \left| \frac{x + y}{4} - \frac{3}{4} \right| \leq \frac{3}{4}|x - y|.$$

- $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ *dado que* $f(0) = 1/2$, $f(1) = 0$ *y* f *es decreciente en* $[0, 1]$.

En consecuencia, de acuerdo con el Teorema de punto fijo (Teorema 8.3.9) existe un único $\alpha \in [0, 1]$ *tal que* $f(\alpha) = \alpha$. *Explícitamente, tenemos que* $f(x) = x$ *si y solo si*

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{4} = x, \text{ o equivalentemente, } x^2 - 7x + 2 = 0.$$

Concluimos que $\alpha = (7 - \sqrt{41})/2$. *Asimismo, por medio de la iteración de punto fijo podemos calcular aproximaciones de precisión arbitraria de* α: *si, por ejemplo, definimos* $a_0 := 0$, *entonces la sucesión* $(a_n)_{n>0}$ *definida por*

$$a_{n+1} := f(a_n) = \frac{a_n^2 - 3a_n + 2}{4} \quad (n \geq 0)$$

converge a α.

Ejemplo 8.3.11. *El Teorema de punto fijo nos provee una herramienta útil para determinar el límite de ciertas sucesiones, como ilustramos en el ejemplo a continuación. Sea* $(a_n)_{n>0}$ *la sucesión definida por*

$$a_0 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n} \quad (n \geq 0). \tag{8.5}$$

Queremos determinar si $(a_n)_{n>0}$ *converge, y en tal caso, cuál es su límite. Para esto, observamos que, si* $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *es la función definida por*

$$f(x) := \frac{1}{1+x},$$

entonces $a_{n+1} = f(a_n)$ *para cada* $n \geq 0$. *Si* $(a_n)_{n>0}$ *converge y llamamos* α *a su límite, tenemos que* $\alpha \geq 0$ *dado que* $a_n \geq 0$ *para cada* $n \geq 0$. *Además,* α *debe ser un punto fijo de* f*, dado que, por la continuidad de* f*,*

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(\alpha).$$

En consecuencia, tenemos que $\alpha = 1/(1+\alpha)$*, o equivalentemente,* $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$*, de lo que concluimos que el único valor posible para* α *es*

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

esto es, la única solución positiva de la ecuación $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$.

A fin de ver que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ *de (8.5) converge, vamos a aplicar el Teorema de punto fijo. Se trata entonces de determinar un conjunto cerrado* $A \subset \mathbb{R}$ *tal que:*

- $(-1+\sqrt{5})/2 \in A$*;*
- f *es contractiva en* A*;*
- $f(A) \subset A$.

Afirmamos que $A := [1/4, 2]$ *es una elección adecuada. En efecto, es claro que* $(-1+\sqrt{5})/2 \in [1/4, 2]$. *Asimismo, observamos que* $f([1/4,2]) \subset [1/4,2]$*, dado que* f *es decreciente,* $f(1/4) = 4/5$ *y* $f(2) = 1/3$. *Por último,* f *es contractiva en* $[1/4,2]$*, dado que, si* $x, y \in [1/4,2]$*, entonces*

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| = \frac{|y-x|}{(1+x)(1+y)} \leq \frac{16}{25}|x-y|.$$

En consecuencia, el Teorema de punto fijo (Teorema 8.3.9) asegura que la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ *de (8.5) converge al único punto fijo de* f *en* $[1/4,2]$*, esto es,* $\alpha := (-1+\sqrt{5})/2$.

Ejercicio 8.3.12 (El método babilónico). *Una forma de aproximar* $\sqrt{2}$ *conocida desde hace muchos años consiste en construir la siguiente sucesión de números racionales* p/q*: comenzando con* $p := 1$ *y* $q := 1$*, calculamos los nuevos valores del numerador y denominador mediante las fórmulas* $p \leftarrow p + 2q$*,* $q \leftarrow p + q$.

El objetivo de este ejercicio es demostrar que este método produce una sucesión $(a_n)_{n>0}$ *de números racionales que converge a* $\sqrt{2}$.

1. *Dado* $a_0 := p/q \in \mathbb{Q}$ *arbitrario, demostrar que* $a_1 := (a_0+2)/(a_0+1)$.

2. *Sea* $(a_n)_{n\geq 0}$ *la sucesión construida mediante el método babilónico a partir de* $a_0 \in \mathbb{Q}$ *arbitrario, es decir,* $a_{n+1} = (a_n+2)/(a_n+1)$ *para* $n \geq 0$. *Demostrar que si* $(a_n)_{n>0}$ *converge, converge a* $\sqrt{2}$.

3. *Demostrar que* $(a_n)_{n>0}$ *converge.*

Ejercicio 8.3.13. *Sea* $a_n := \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}$ $(n \geq 1)$ *(la notación de puntos suspensivos representa n raíces anidadas).*

1. *Hallar* $A \subset \mathbb{R}$ *y una función* $f : A \to \mathbb{R}$ *tal que* $a_{n+1} = f(a_n)$ *para* $n \geq 0$.

2. *Demostrar que existe* $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$.

3. *Determinar* α.

4. *Analizar la convergencia de la sucesión* $(a_n)_{n>0}$ *definida por* $a_0 = 1{,}5$ *y* $a_{n+1} := f(a_n)$ *para* $n \geq 0$.

Ejercicio 8.3.14. *A fin de resolver la ecuación* $x+\ln x = 0$, *cuya solución es* $\alpha \approx \frac{1}{2}$, *mediante un método iterativo, se proponen las siguientes fórmulas de iteración:*

$$a_{n+1} := -\ln a_n, \qquad a_{n+1} := e^{-a_n}, \qquad a_{n+1} := \frac{a_n+e^{-a_n}}{2}.$$

¿Cuáles de estas fórmulas **pueden** *utilizarse?*

8.3.3. Orden de convergencia

En la Sección 2.2.2 hemos observado que a la aplicación del método de Newton a la ecuación $x^2 = 2$ en la Sección 2.1 subyace de hecho el problema de determinar un punto fijo de una función adecuada. En efecto, recordamos que, partiendo de una aproximación inicial, que hemos fijado arbitrariamente en $a_0 := 1{,}5$, definimos en general $a_{n+1} := a_n/2+1/a_n$. Así, si llamamos $g(x) := x/2+1/x$, la sucesión tiene la forma:

$$a_{n+1} = g(a_n). \tag{8.6}$$

En consecuencia, si la sucesión $(a_n)_{n>0}$ converge a $\alpha \in \mathbb{R}$ (convergencia que se deduce de la Hipótesis 3 de completitud, ya que $(a_n)_{n>0}$ es monótona y acotada), dado que g es continua, necesariamente tendremos

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(\alpha),$$

es decir,

$$\alpha = g(\alpha) = \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\alpha} = \alpha+\frac{2-\alpha^2}{2\alpha},$$

Tabla 8.3.: El método de Newton aplicado a $x^2 = 2$.

n	a_n	$f(a_n)$
0	1.50000000000000	0.250000000
1	1.41666666666667	0.006944444
2	1.41421568627451	0.000006007
3	1.41421356237469	0.000000000
4	1.41421356237309	0.000000000

Tabla 8.4.: El método de bisección aplicado a $x^2 = 2$.

n	c_n	$f(c_n)$
0	1.50000000000	0.250000000
3	1.43750000000	0.066406250
7	1.41796875000	0.010635376
10	1.41455078125	0.000953913

de donde inmediatamente se deduce que $\alpha^2 - 2 = 0$. Así, la sucesión del método de Newton para la ecuación $x^2 = 2$ es de hecho la que produce la iteración de punto fijo aplicada a la función $g(x) := x/2 + 1/x$.

Una característica fundamental del método de Newton aplicado a la ecuación $x^2 = 2$ es su gran velocidad de convergencia (ver la Tabla 8.3). En contraposición, el proceso de aproximación de la solución positiva de $x^2 = 2$ mediante el método de bisección (Tabla 8.4) o del punto fijo de la función coseno por medio de la iteración de punto fijo (Tabla 8.2) puede resultar bastante lento. Esto nos plantea la pregunta: ¿por qué tenemos tal diferencia de velocidad de convergencia?

En general, dado un problema de la forma $g(x) = x$, donde $g : A \to A$ es una función continua y contractiva definida sobre un subconjunto cerrado A de $\mathbb{R}$, la sucesión $(a_n)_{n>0}$ de la iteración de punto fijo converge al único punto fijo α de g en A, y según hemos visto en la demostración del Teorema de punto fijo (Teorema 8.3.9), satisface la condición:

$$|a_{n+1} - \alpha| \leq L|a_n - \alpha|.$$

Por lo tanto, el **error** $|a_n - \alpha|$ que cometemos al aproximar α por a_n mejora en, al menos, un factor L al paso siguiente. Así, por ejemplo, si $L = 1/10$, sería esperable que la aproximación a_{n+1} del $(n+1)$–ésimo paso de iteración coincida en, al menos, un dígito decimal más con la solución α de nuestro problema que la aproximación a_n del n–ésimo paso. Por otro lado, si $L = 1/2$, dado que $(1/2)^4 \leq 1/10 \leq (1/2)^3$ tenemos que, cada 3 o 4 iteraciones generalmente obtenemos un nuevo dígito decimal de aproximación, como se puede constatar en la aproximación de $\sqrt{2}$ mediante el método de bisección en la Tabla 8.4.

Sin embargo, la estimación $|a_{n+1} - \alpha| \leq L|a_n - \alpha|$ es solamente eso: una estimación, y por lo

tanto, puede ocurrir que en determinados casos el error pueda acotarse en forma mucho mejor que ésta. Éste es el caso del método de Newton aplicado a $x^2 = 2$. Recordamos que, en este caso, teníamos la identidad

$$a_{n+1}^2 - 2 = \left(a_n - \frac{a_n^2 - 2}{2a_n}\right)^2 - 2 = a_n^2 - (a_n^2 - 2) + \left(\frac{a_n^2 - 2}{2a_n}\right)^2 - 2 = \left(\frac{a_n^2 - 2}{2a_n}\right)^2,$$

de donde, teniendo en cuenta que $a_n^2 > 2$ para cada $n \geq 0$ (Lema 2.2.3), resulta

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{(a_n + \sqrt{2})^2}{(a_{n+1} + \sqrt{2})(2a_n)^2}(a_n - \sqrt{2})^2.$$

De esto concluimos que

$$\frac{|a_{n+1} - \sqrt{2}|}{(a_n - \sqrt{2})^2} = \frac{(a_n + \sqrt{2})^2}{(a_{n+1} + \sqrt{2})(2a_n)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{(2\sqrt{2})^2}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Esto es un caso de lo que se conoce como **orden de convergencia cuadrático**: el error a cada paso es, salvo constantes, el cuadrado del error del paso anterior. En una sucesión de este tipo es de esperar que la cantidad de dígitos exactos de una aproximación dada sea el doble de la del término anterior. En general, tenemos la siguiente definición.

Definición 8.3.15 (Orden de convergencia). *Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que converge a $\alpha \in \mathbb{R}$* **con orden** *p si existe una constante $L > 0$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} - \alpha|}{|a_n - \alpha|^p} = L.$$

La diferencia entre el método de bisección y el de Newton aplicados a $x^2 = 2$ se explica entonces en estos términos: el método de bisección produce una sucesión de aproximaciones cuyo orden de convergencia es **lineal**, en tanto que el método de Newton produce una cuyo orden de convergencia es **cuadrático**. Este comportamiento del método de Newton con respecto a $x^2 = 2$ no es particular, sino por el contrario, el caso general: **el método de Newton tiene, en general, orden de convergencia cuadrático**. Sin embargo, a fin de demostrar esta afirmación necesitamos herramientas más finas, por lo que vamos a postergar su discusión hasta la Sección 13.2.2.

Ejemplo 8.3.16. *Analizamos el orden de convergencia de la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por $a_0 := 1$, $a_{n+1} := \cos a_n$ $(n \geq 0)$. En el Lema 8.3.1 hemos visto que $(a_n)_{n\geq 0}$ converge al único punto fijo α de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \cos x$. Para esto, suponiendo que $a_n \neq \alpha$ para cada $n \geq 0$, tenemos que*

$$\frac{|a_{n+1} - \alpha|}{|a_n - \alpha|} = \frac{|\cos a_n - \cos\alpha|}{|a_n - \alpha|} = |\operatorname{sen}\xi_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\operatorname{sen}\alpha| > 0,$$

donde ξ_n es un punto intermedio entre a_n y α para cada $n \geq 0$. Esto muestra que la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ en consideración converge linealmente a α.

Ejemplo 8.3.17 (Convergencia cuadrática del método de Newton para polinomios). *Recordamos que, si $p \in \mathbb{R}[x]$ tiene una raíz simple $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces tenemos el siguiente resultado de conver-*

gencia local (Teorema 7.4.13): existe $\delta > 0$ tal que, si $|a_0 - \alpha| < \delta$, entonces la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton aplicado a la ecuación $p(x) = 0$, comenzando en a_0, converge a α. Más aún, hemos demostrado que existe $K > 0$ tal que

$$\frac{|a_{n+1} - \alpha|}{|a_n - \alpha|^2} \leq K$$

para cada $n \geq 0$. Vemos entonces que nuestro resultado de convergencia local muestra que, si α es una raíz simple de p, entonces la sucesión del método de Newton, comenzando en a_0 suficientemente cerca de α, **converge** *a α* **con orden al menos cuadrático**.

Ejercicio 8.3.18. *Consideremos la función polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 - 2x + 2$.*

1. *Determinar los puntos fijos de f en $\mathbb{R}$.*
2. *Analizar la convergencia de la sucesión de la iteración de punto fijo $(a_n)_{n>0}$, $a_{n+1} := f(a_n)$ para cada $a_0 \in \mathbb{R}$.*
3. *En los casos en que $(a_n)_{n\geq 0}$ converja, determinar su orden de convergencia.*

Ejercicio 8.3.19. *Determinar el orden de convergencia de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del método babilónico del Ejercicio 8.3.12.*

Ejercicio 8.3.20 (Aceleración de la convergencia). *En sucesiones que convergen "lentamente", es posible "acelerar" dicha convergencia mediante un método general conocido como el* **método de aceleración de Aitken**. *Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathbb{R}$ que converge a $\alpha \in \mathbb{R}$ con orden lineal, siendo la constante L en la definición del orden de convergencia menor que 1, es decir, $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - \alpha|/|a_n - \alpha| = L < 1$.*

Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$b_n := \frac{a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2}{a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n}.$$

1. *Sea $e_n := a_n - \alpha$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $b_n - \alpha = \dfrac{e_n e_{n+2} - e_{n+1}^2}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n}$.*
2. *Escribamos e_{n+1} en la forma $e_{n+1} = (L + \delta_n)e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que*

$$b_n - \alpha = e_n \frac{(L + \delta_n)(L + \delta_{n+1}) - (L + \delta_n)^2}{(L + \delta_{n+1})(L + \delta_n) - 2(L + \delta_{n+1}) + 1}.$$

3. *Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ y concluir que $\lim_{n\to\infty}(b_n - \alpha)/e_n = 0$. Explicar en qué sentido la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α más "velozmente" que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

9. El cuerpo ordenado completo de los números reales

En el Capítulo 5 **hemos definido el conjunto de los números reales como el conjunto de los desarrollos decimales infinitos admisibles**, es decir,

$$\{\pm r_0.r_1r_2\ldots : r_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, r_i \in \{0,\ldots,9\} \text{ para } i \geq 1 \text{ y para cada } i \geq 0 \text{ existe } j > i \text{ con } r_j \neq 9\}.$$

También **hemos definido las operaciones aritméticas** entre números reales: si $\star \in \{+,-,\cdot,\div\}$ es una operación aritmética cualquiera, hemos definido

$$(\pm r_0.r_1r_2\ldots)\star(\pm s_0.s_1s_2\ldots) := \lim_{n\to\infty}\big((\pm r_0.r_1r_2\ldots r_n)\star(\pm s_0.s_1s_2\ldots s_n)\big),$$

es decir, $(\pm r_0.r_1r_2\ldots)\star(\pm s_0.s_1s_2\ldots)$ es el desarrollo decimal admisible determinado por la sucesión de Cauchy $\big((\pm r_0.r_1r_2\ldots r_n)\star(\pm s_0.s_1s_2\ldots s_n)\big)_{n\geq 0}$. Finalmente, **hemos dado una noción de orden total** $\leq$, definiendo que

$\alpha := \pm r_0.r_1r_2\ldots \leq \beta := \pm s_0.s_1s_2\ldots$ si y solo si $\alpha = \beta$ o $\alpha \neq \beta$ y $\pm r_{j_0} < \pm s_{j_0}$, siendo $j_0 := \text{mín}\{j \geq 0 : r_j \neq s_j\}$.

Así hemos obtenido lo que hemos denominado el **cuerpo ordenado de los números reales**. Asimismo, hemos afirmado que el cuerpo ordenado de los números reales resulta **completo**, es decir, satisface las siguientes hipótesis de completitud:

- Hipótesis 1: Toda sucesión de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge en $\mathbb{R}$.
- Hipótesis 2: Toda sucesión de intervalos reales cerrados, acotados y encajados cuya longitud tiende a 0 se interseca en un punto en $\mathbb{R}$.
- Hipótesis 3: Toda sucesión monótona y acotada de $\mathbb{R}$ converge en $\mathbb{R}$.

Asumiendo la validez de estas hipótesis de completitud hemos establecido la existencia de la raíz n–ésima de cualquier número real positivo (Teorema 7.1.3) y la existencia de raíces reales de cualquier polinomio real de grado impar (Ejemplo 7.4.5). A su vez, hemos demostrado tres resultados clásicos del análisis: el Teorema de Bolzano (Sección 8.1), el Teorema de Weierstrass (Sección 8.2) y el Teorema de Punto Fijo (Sección 8.3). Como ha podido apreciarse en los dos capítulos precedentes, la validez de cada uno de los resultados que acabamos de mencionar depende de manera esencial de la validez de algunas de las hipótesis de completitud precedentes.

Nuestra intención en este capítulo es retomar la cuestión de la completitud de $\mathbb{R}$, determinando por qué todas las afirmaciones que hemos hecho son efectivamente válidas. Asimismo, vamos a

reexpresar la completitud de $\mathbb{R}$ en términos de la existencia de supremos e ínfimos. También vamos a aplicar la completitud en la construcción de la exponencial en $\mathbb{R}$. Por otro lado, vamos a discutir un tipo particular de sucesiones que aparece en diversas construcciones del análisis: las series de números reales. Por último, en un apéndice vamos demostrar que la construcción que hemos hecho no es arbitraria, en el sentido de que dos cuerpos ordenados arquimedianos completos son matemáticamente equivalentes, en un sentido a precisar.

9.1. La completitud de $\mathbb{R}$

Cuando postulamos las hipótesis de completitud hemos demostrado que cada sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ converge en $\mathbb{R}$ (Lema 6.1.1). Si bien esto **no prueba que $\mathbb{R}$ es completo**, ya que solo asegura que las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{Q}$ convergen en $\mathbb{R}$, es el paso clave a fin de establecer la completitud de $\mathbb{R}$, como vemos en el siguiente resultado.

Teorema 9.1.1 (Completitud de $\mathbb{R}$). *$\mathbb{R}$ satiface la Hipótesis 1 de completitud, es decir, las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{R}$ convergen en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de $\mathbb{R}$. Sea $\pm r_0^{(n)}.r_1^{(n)}r_2^{(n)}\ldots$ el desarrollo decimal admisible de cada α_n y sea $R_N^{(n)} := \pm r_0^{(n)}.r_1^{(n)}\ldots r_N^{(n)}$ el desarrollo de N dígitos de α_n para cada $N \geq 0$. Tenemos que $|R_n^{(n)} - \alpha_n| < 1/10^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $(R_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$. Sea $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/10^{n_0} < \varepsilon$. Dado que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$ si $n,m \geq n_1$. Por lo tanto, si $n,m \geq \text{máx}\{n_0,n_1\}$, entonces

$$|R_n^{(n)} - R_m^{(m)}| \leq |R_n^{(n)} - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_m| + |R_m^{(m)} - \alpha_m| < 3\varepsilon.$$

Esto demuestra que la sucesión $(R_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y por lo tanto, que converge a $\alpha \in \mathbb{R}$. Afirmamos que la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α. Para ver esto, sean $\varepsilon > 0$ y $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tales que $1/10^{n_0} < \varepsilon$ y $|R_n^{(n)} - \alpha| < \varepsilon$ si $n \geq n_1$. Entonces, para $n \geq \text{máx}\{n_0,n_1\}$, resulta

$$|\alpha_n - \alpha| \leq |\alpha_n - R_n^{(n)}| + |R_n^{(n)} - \alpha| < \frac{1}{10^n} + \varepsilon \leq \frac{1}{10^{n_0}} + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Esto completa la demostración. □

Corolario 9.1.2 (Completitud de $\mathbb{R}$ bis). *$\mathbb{R}$ satisface las Hipótesis 2 y 3 de completitud:*

1. *si $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos reales cerrados, acotados y encajados tal que $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n] = \{\alpha\}$,*
2. *cada sucesión monótona y acotada de $\mathbb{R}$ converge en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Comenzamos con la segunda afirmación. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona y acotada de $\mathbb{R}$. Con la misma demostración que cuando probamos que toda sucesión monótona y acotada de $\mathbb{Q}$ es de Cauchy (Teorema 6.3.7), concluimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de $\mathbb{R}$, y por lo tanto, el Teorema de completitud (Teorema 9.1.1) implica que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{R}$. Esto demuestra 2.

Consideramos ahora la primera afirmación. Observamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones monótonas y acotadas de $\mathbb{R}$. En efecto, dado que $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$ para cada $n\in\mathbb{N}$, tenemos que $a_n\le a_{n+1}$ y $b_{n+1}\le b_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Además, $a_n,b_n\in[a_1,b_1]$, lo que implica que $a_1\le a_n\le b_n\le b_1$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Esto demuestra que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones monótonas y acotadas, y por lo tanto, la segunda afirmación, ya demostrada, asegura que convergen a α y β en $\mathbb{R}$. Más aún, dado que $(b_n-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, resulta $\alpha=\beta$.

Observamos que $\alpha\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]$, dado que $a_n\le\alpha\le b_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$ (ver Ejercicio 9.1.3). Asimismo, si $\gamma\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]$, entonces $\gamma\in[a_n,b_n]$ para cada $n\in\mathbb{N}$, es decir, $a_n\le\gamma\le b_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$. En consecuencia, por la propiedad sandwich (Lema 3.1.35) concluimos que $\gamma=\alpha$, y por ende, que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]=\{\alpha\}$. □

Ejercicio 9.1.3. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona y acotada de $\mathbb{R}$ y sea $\alpha\in\mathbb{R}$ su límite. Demostrar que:*

1. *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces $a_n\le\alpha$ para cada $n\in\mathbb{N}$.*
2. *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, entonces $\alpha\le a_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$.*

9.1.1. La densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y la exponencial real

Cabe destacar que, simplificadamente, la demostración de la completitud de $\mathbb{R}$ (Teorema 9.1.1) procede de la siguiente manera: en primer lugar, se demuestra que las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{Q}$ convergen en $\mathbb{R}$ (Lema 6.1.1), y posteriormente se demuestra el correspondiente enunciado sobre $\mathbb{R}$. Esta forma de proceder es de hecho una estrategia sumamente útil para demostrar cierto tipo de afirmaciones sobre $\mathbb{R}$, que se basa en un hecho fundamental: la **densidad** de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. El objetivo de los siguientes ejercicios es explicitar este hecho y utilizarlo.

Ejercicio 9.1.4 (Sobre la densidad)**.** *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *Cada número real α es el límite de una sucesión de elementos de S.*
- *Dados dos números reales $\alpha<\beta$, existe $s\in S$ tal que $\alpha<s<\beta$.*

Un conjunto $S\subset\mathbb{R}$ que satisface alguna de estas propiedades se denomina **denso** *(en $\mathbb{R}$).*

Ejercicio 9.1.5 (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$)**.** *Demostrar que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.*

Ejercicio 9.1.6. *Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f(x)=g(x)$ para cada $x\in\mathbb{Q}$. Demostrar que $f=g$.* (Sugerencia: si $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, entonces existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$. Por hipótesis, $f(a_n)=g(a_n)$ para cada $n\in\mathbb{N}$.)

Ejercicio 9.1.7. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes condiciones:*

1. *$f(x+y)=f(x)+f(y)$.*
2. *$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$.*
3. *Existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)\neq 0$.*

Demostrar que $f(x) = x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. (Sugerencia: demostrar en primer lugar que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, luego que $f(x) > 0$ para todo $x > 0$ y finalmente que $f(x) > f(y)$ para todo $x > y$. Observar que esta última propiedad implica la continuidad de f.)

La exponencial real

Vamos a aplicar estas ideas a fin de discutir la **exponencial real**. En la Sección 7.1.1 hemos considerado la exponenciación de potencia racional. Dado $a \in \mathbb{R}_{>0}$ y $r \in \mathbb{Q}$, hemos definido a^r, y hemos demostrado que esta definición satisface las siguientes propiedades para cada par de números racionales r, s (ver (7.4), (7.5)):

$$a^{r+s} = a^r \cdot a^s, \quad a^{r \cdot s} = (a^r)^s, \quad a^r < a^s \text{ si } a > 1, \quad a^r > a^s \text{ si } a < 1. \tag{9.1}$$

Nuestro propósito en lo que sigue es **extender esta definición al caso de exponentes reales**, de forma que se satisfaga (9.1). En particular, la monotonía (las últimas dos propiedades de (9.1)) de la exponencial real va a implicar que la función exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) := a^x$ resulta continua, lo cual nos da una idea sobre cómo encarar la definición de dicha extensión. En efecto, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ sabemos que existe una sucesión $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$ tal que $\alpha = \text{lím}_{n\to\infty} R_n$. De hecho, si $\alpha = \pm r_0.r_1r_2\ldots$ es el desarrollo decimal infinito admisible de α, podemos elegir R_n en la forma $R_n := \pm r_0.r_1\ldots r_n$. Si queremos que f resulte continua, entonces es necesario que $f(\alpha) = a^\alpha = \text{lím}_{n\to\infty} f(R_n) = \text{lím}_{n\to\infty} a^{R_n}$, lo que nos sugiere una definición de a^α. Por supuesto, para que esta "definición" tenga sentido, es necesario ver que la sucesión $(a^{R_n})_{n>0}$ tiene límite.

Lema 9.1.8. *Con las hipótesis anteriores, la sucesión* $(a^{R_n})_{n>0}$ *converge en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a > 1$ y $\alpha > 0$, y sea $M > 0$ una cota superior racional para la sucesión $(R_n)_{n>0}$. Por la monotonía de la exponencial racional tenemos que la sucesión $(a^{R_n})_{n>0}$ es creciente y a^M es una cota superior de la misma. En consecuencia, $(a^{R_n})_{n>0}$ resulta una sucesión convergente. □

Ahora sí podemos definir la exponenciación real.

Definición 9.1.9 (Exponenciación real). *Sea* $\alpha = \pm r_0.r_1r_2\ldots$ *un número real y escribamos* $R_n := \pm r_0.r_1\ldots r_n$ *para cada* $n \geq 0$. *Definimos* a^α *como el límite de la sucesión* $(a^{R_n})_{n>0}$.

Una primera observación en relación con esta definición es que, si bien hemos elegido una sucesión particular para representar al número real α en consideración, la de los desarrollos decimales finitos $(R_n)_{n>0}$ de α, la definición de a^α no depende de la sucesión $(R_n)_{n>0}$, en el siguiente sentido: si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathbb{Q}$ que converge a α, entonces la sucesión $(S_n - R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, de lo cual, de acuerdo al Ejercicio 7.1.17, resulta $\text{lím}_{n\to\infty} a^{R_n - S_n} = 1$. Por lo tanto, las propiedades aritméticas de los límites aseguran que $\text{lím}_{n\to\infty} a^{S_n} = \text{lím}_{n\to\infty} a^{S_n - R_n} \cdot \text{lím}_{n\to\infty} a^{R_n} = a^\alpha$. Resumimos estas consideraciones en la siguiente observación.

Observación 9.1.10. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de* $\mathbb{Q}$ *que converge a* α. *Entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a^{S_n} = a^\alpha$.

El siguiente paso es ver que esta definición satisface las propiedades (9.1). Comenzamos por las dos propiedades de monotonía de (9.1).

Lema 9.1.11 (Monotonía de la exponencial real). *Sean $a > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $\alpha < \beta$, entonces $a^\alpha < a^\beta$ para $a > 1$, en tanto que $a^\alpha > a^\beta$ para $a < 1$.*

Demostración. Como en la demostración de la monotonía de la exponenciación racional (Lema 7.1.11), podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a > 1$. Sean $\alpha := \pm r_0.r_1r_2\ldots$ y $\beta := \pm s_0.s_1s_2\ldots$ los desarrollos decimales infinitos admisibles de α y β, y sean $R_n := \pm r_0.r_1r_2\ldots r_n$ y $S_n := \pm s_0.s_1s_2\ldots s_n$ para cada $n \geq 0$. Entonces $R_n \leq S_n$ para cada $n \geq 0$, de donde concluimos, por la monotonía de exponencial racional (Lema 7.1.11), que $a^{R_n} \leq a^{S_n}$ para cada $n \geq 0$. Esto implica que $a^\alpha = \text{lím}_{n\to\infty} a^{R_n} \leq \text{lím}_{n\to\infty} a^{S_n} = a^\beta$.

Asimismo, sean $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $\alpha \leq r < s \leq \beta$. Entonces, por lo que demostramos anteriormente y la monotonía de la exponencial racional, tenemos que $a^\alpha \leq a^r < a^s \leq a^\beta$, lo cual concluye la demostración. □

Una consecuencia útil del resultado anterior es el siguiente corolario.

Corolario 9.1.12. *Sean $a > 0$ y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{R}$ que converge a 0. Entonces $(a^{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a > 1$. Sea $\varepsilon > 0$. La continuidad de la exponencial racional (Lema 7.1.18) implica que $(a^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a^{-1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a 1. Existe entonces $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a^{1/n} - 1| < \varepsilon$ y $|a^{-1/n} - 1| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_n| < 1/n_0$ si $n \geq n_1$. Así, $-1/n_0 < \alpha_n < 1/n_0$, y por lo tanto, $-\varepsilon < a^{-1/n_0} - 1 < a^{\alpha_n} - 1 < a^{1/n_0} - 1 < \varepsilon$ para $n \geq n_1$. Esto muestra el enunciado. □

Podemos ahora demostrar las dos primeras propiedades de (9.1).

Lema 9.1.13. *Sean $a > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ y $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.*

Demostración. Sean $\alpha := \pm r_0.r_1r_2\ldots$ y $\beta := \pm s_0.s_1s_2\ldots$. Si llamamos $R_n := \pm r_0.r_1\ldots r_n$ y $S_n := \pm s_0.s_1\ldots s_n$ para cada $n \geq 0$, tenemos que $a^\alpha = \text{lím}_{n\to\infty} a^{R_n}$, $a^\beta = \text{lím}_{n\to\infty} a^{S_n}$ y, de acuerdo con la Observación 9.1.10, $a^{\alpha+\beta} = \text{lím}_{n\to\infty} a^{R_n+S_n}$. Por lo tanto, las propiedades aritméticas de los límites y de la exponenciación racional (Lema 7.1.8) implican que

$$a^\alpha \cdot a^\beta = \lim_{n\to\infty} a^{R_n} \cdot a^{S_n} = \lim_{n\to\infty} a^{R_n+S_n} = a^{\alpha+\beta}. \tag{9.2}$$

Asimismo, si $q \in \mathbb{Q}$, entonces, por la continuidad de la potencia racional (Lema 7.1.18) y las propiedades de la exponenciación racional (Lema 7.1.8), vemos que

$$(a^\alpha)^q = \lim_{n\to\infty} (a^{R_n})^q = \lim_{n\to\infty} a^{R_n\cdot q} = a^{\alpha\cdot q} = \lim_{n\to\infty} (a^q)^{R_n} = (a^q)^\alpha.$$

En consecuencia, por (9.2) obtenemos que

$$(a^\alpha)^\beta = \lim_{n\to\infty} (a^\alpha)^{S_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha\cdot S_n} = \lim_{n\to\infty} a^{R_n\cdot S_n} a^{(\alpha-R_n)\cdot S_n} = \lim_{n\to\infty} a^{R_n\cdot S_n} \lim_{n\to\infty} a^{S_n(\alpha-R_n)} = a^{\alpha\cdot\beta},$$

dado que $\text{lím}_{n\to\infty} a^{S_n(\alpha-R_n)} = 1$ (Corolario 9.1.12). Esto concluye la demostración. □

Por último, demostramos que la exponencial real es continua.

Lema 9.1.14 (Continuidad de la exponencial real). *Sea $a > 0$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ la función definida por $f(x) := a^x$. Entonces f es continua.*

Demostración. Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{R}$ que converge a $\alpha \in \mathbb{R}$. Por las propiedades de la exponenciación real (Lema 9.1.13) tenemos que $a^{\alpha_n} = a^{\alpha} \cdot a^{\alpha_n - \alpha}$. En consecuencia, dado que $\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n - \alpha} = 1$ (Corolario 9.1.12), concluimos que $\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = a^{\alpha}$, como queríamos demostrar. □

Ejercicio 9.1.15. *Sea $a > 1$.*

1. *Demostrar que si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathbb{R}_{>0}$ con límite infinito, entonces $(a^{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite infinito.*

2. *Demostrar que si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathbb{R}_{<0}$ con límite infinito, entonces $(a^{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

3. *Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) := a^x$ es biyectiva.*

Ejercicio 9.1.16 (Potenciación real). *Sea α, x, y reales positivos.*

1. *Demostrar que* $x^{\alpha} \cdot y^{\alpha} = (x \cdot y)^{\alpha}$, $x^{-\alpha} = (x^{\alpha})^{-1} = (x^{-1})^{\alpha}$ *y* $(x/y)^{\alpha} = x^{\alpha}/y^{\alpha}$. (Sugerencia: usar las propiedades correspondientes para $\alpha \in \mathbb{Q}$ (Ejercicio 7.1.10).)

2. *Demostrar que si $x < y$ entonces $x^{\alpha} < y^{\alpha}$.* (Sugerencia: observar que $x^{\alpha} < y^{\alpha}$ si y solo si $(x/y)^{\alpha} < 1$ y aplicar la monotonía de la exponencial real (Lema 9.1.11).)

3. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{R}_{>0}$ que converge a 1. Demostrar que $(x_n^{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1.* (Sugerencia: suponiendo que $x_n \geq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, demostrar que $x_n^{\lfloor\alpha\rfloor} \leq x_n^{\alpha} \leq x_n^{\lceil\alpha\rceil}$ y aplicar la continuidad de la potenciación racional (Lema 7.1.15).)

4. *Demostrar que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, la función $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^{\alpha}$ es continua.*

9.2. Supremo e ínfimo

En nuestra discusión en relación con las sucesiones monótonas y acotadas hemos observado que el límite $\alpha \in \mathbb{R}$ de una sucesión monótona y acotada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee la siguiente propiedad en relación con los términos a_n de la sucesión (Ejercicio 9.1.3):

1. si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces α es una **cota superior** para $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, es decir, $a_n \leq \alpha$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

2. si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, entonces α es una **cota inferior** para $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, es decir, $\alpha \leq a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos, para fijar ideas, que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ su límite. Entonces, no solamente α es una cota superior del conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ formado por los términos de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sino que debe tratarse, en algún sentido, de la **mejor cota superior posible**, dado que, intuitivamente, está **tan próxima a términos** a_n de la sucesión como uno quiera.

Vamos a formalizar esta idea intuitiva de la "mejor cota superior" del conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. En matemática, acotar nos permite estimar el valor (o el conjunto de valores) que no conocemos. En este sentido, la "mejor" cota superior del conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es la **más próxima** al mismo, que debe ser necesariamente la **menor cota superior posible**. Ésta es de hecho una definición alternativa del límite de una sucesión creciente y acotada, como afirmamos en el siguiente resultado.

Lema 9.2.1 (Límite de una sucesión creciente). *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente y acotada. Entonces $\alpha \in \mathbb{R}$ es el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y solo si α es la menor cota superior de $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\alpha \in \mathbb{R}$ es el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, por el Ejercicio 9.1.3 tenemos que α es una cota superior de $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. A fin de demostrar que α es la menor cota superior de $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, sea $\beta < \alpha$ y sea $\varepsilon := \alpha - \beta > 0$. Dado que $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$. Así, $a_n - \alpha > -\varepsilon = \beta - \alpha$, y por lo tanto, $a_n > \beta$ para cada $n \geq n_0$. Concluimos que β no es una cota superior de $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, de lo cual deducimos que α es la menor cota superior de $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Recíprocamente, supongamos que α es la menor cota superior de $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\alpha - \varepsilon$ no es una cota superior del conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, ya que α es la **menor** cota superior de $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\alpha - \varepsilon < \alpha$. En consecuencia, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \varepsilon < a_{n_0}$, y por lo tanto, dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y α es una cota superior de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, concluimos que $\alpha - \varepsilon < a_n \leq \alpha$ para cada $n \geq n_0$. Esto implica que $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$ y demuestra que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α. □

Ejercicio 9.2.2 (Límite de una sucesión decreciente). *Enunciar y demostrar un resultado análogo al del Lema 9.2.1 para sucesiones decrecientes y acotadas.*

Tenemos entonces que el límite de una sucesión monótona (creciente o decreciente) y acotada se caracteriza en términos de la mejor cota (superior o inferior) del conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dicha cota se denomina el **supremo** o el **ínfimo** del conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Más generalmente, esta definición se puede extender a subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$.

Definición 9.2.3 (Supremo e ínfimo). *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$.*

1. *Decimos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es el* **supremo** *de S, y escribimos $\alpha = \sup(S)$, si α es una cota superior de S y $\alpha \leq \beta$ para toda cota superior $\beta \in \mathbb{R}$ de S.*

2. *Decimos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es el* **ínfimo** *de S, y escribimos $\alpha = \inf(S)$, si α es una cota inferior de S y $\alpha \geq \beta$ para toda cota inferior $\beta \in \mathbb{R}$ de S.*

Ejercicio 9.2.4 (Una caracterización alternativa del supremo y el ínfimo). *Sea $S \subset \mathbb{R}$.*

1. *Demostrar que α es el supremo de S si y solo si*
   - *α es una cota superior de S, y*

- *para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in S$ tal que $\alpha - \varepsilon < x$.*

2. *Enunciar y demostrar una caracterización análoga para el ínfimo de S.*

9.2.1. La completitud en términos de supremos e ínfimos

Dado que las sucesiones monótonas y acotadas tienen límite, la caracterización del límite de las sucesiones monótonas (Lema 9.2.1 y Ejercicio 9.2.2) asegura que el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ posee supremo si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada, e ínfimo si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente y acotada. Más generalmente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 9.2.5 (Completitud vía supremos e ínfimos). *Valen las afirmaciones:*

- *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.*
- *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente tiene ínfimo.*

Demostración. Demostramos la primera afirmación. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Entonces existen números reales, digamos A_0, B_0, tales que A_0 no es una cota superior de S y B_0 sí lo es. Vamos a "encontrar" el supremo de S por medio de un proceso del tipo de "bisección", es decir, vamos a construir una sucesión $(A_n)_{n>0}$ de números reales que no son cotas superiores de S y una sucesión $(B_n)_{n>0}$ de cotas superiores de S, que refinan progresivamente a A_0 y B_0 y convergen al supremo de S. Para esto, consideramos el punto medio $C_0 := (A_0 + B_0)/2$ de $[A_0, B_0]$, y definimos $[A_1, B_1]$ como $[A_0, C_0]$ si C_0 es una cota superior para S y $[C_0, B_0]$ en caso contrario. De esta manera, tenemos que A_1 no es una cota superior de S y B_1 sí lo es.

Prosiguiendo de esta manera, obtenemos una sucesión de intervalos cerrados, acotados y encajados $[A_0, B_0] \supset [A_1, B_1] \supset \cdots$ cuya longitud tiende a cero, de forma tal que A_n no es cota superior de S y B_n sí lo es para cada $n \geq 0$. En particular, tanto la sucesión $(A_n)_{n>0}$ como $(B_n)_{n>0}$ convergen en $\mathbb{R}$, al mismo número real, digamos α.

Observamos en primer lugar que α es una cota superior de S. De hecho, dado $s \in S$, tenemos que $B_n \geq s$ para cada $n \geq 0$. Así, por el principio de conservación del número (Lema 3.1.40) tenemos que el límite α de $(B_n)_{n>0}$ satisface la condición $\alpha \geq s$.

Por otro lado, si β es una cota superior para S, tenemos que $A_n \leq \beta$ para cada $n \geq 0$, dado que cada A_n no es una cota superior para S. Por lo tanto, el principio de "conservación de los números" asegura que $\alpha \leq \beta$. Esto demuestra que α es la menor cota superior de S, esto es, el supremo de S, y concluye la demostración. □

Hemos introducido las nociones de supremo e ínfimo en relación con el límite de las sucesiones monótonas y acotadas, nociones que posteriormente hemos generalizado a subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$. De todas maneras, también es posible caracterizar el supremo y el ínfimo de un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}$ en términos de sucesiones de S, como vemos en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 9.2.6 (Supremo e ínfimo mediante sucesiones).

1. *Sea $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Entonces $\alpha \in \mathbb{R}$ es el supremo de S si y solo si α es cota superior de S y existe una sucesión de S que converge a α.*

2. *Enunciar y demostrar una caracterización análoga a la del ítem anterior para el ínfimo de un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente.*

Ejercicio 9.2.7. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{R}$ que converge a $\alpha \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $A_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ y $B_n := \text{ínf}\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$. Demostrar que las sucesiones $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a α.*

Ejercicio 9.2.8. *Hallar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos:*

$$S_1 := \left\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\},\ S_2 := \left\{\frac{1}{2^k} + \frac{1}{5^n} : k, n \in \mathbb{N}\right\},\ S_3 := \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}.$$

Ejercicio 9.2.9. *Probar el siguiente* **Teorema de comparación para supremos***: si S, T son dos subconjuntos no vacíos acotados superiormente de $\mathbb{R}$, tales que $a \leq b$ para cada $a \in S$ y cada $b \in T$, entonces $\sup(S) \leq \sup(T)$.*

9.3. Series

En las secciones anteriores hemos considerado un tipo particular de sucesiones: las definidas por los desarrollos decimales finitos. La característica especial de estas sucesiones que queremos poner de manifiesto aquí es que el $(m+1)$–ésimo término de una sucesión de desarrollos decimales finitos $(r_0.r_1r_2\dots r_n)_{n>0}$ se obtiene a partir del m–ésimo término **sumando** a éste un elemento determinado, $r_{m+1}/10^{m+1}$. Por supuesto, toda sucesión puede describirse de esta manera, dado que a_{m+1} siempre se obtiene sumando $a_{m+1} - a_m$ al término a_m, pero la situación que nos interesa es cuando este término es **particularmente interesante** por algún motivo determinado. Este tipo de sucesiones es lo que vamos a denominar una **serie**.

Definición 9.3.1. *Un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ se denominan una* **serie real** *si $s_n = a_1 + \dots + a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Vamos a emplear la **notación** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para referirnos a las dos sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ involucradas: el signo de suma hace referencia a que cada s_n se obtiene a partir de la suma de los términos a_n, en tanto que el hecho de que la suma es infinita da la pauta de que nos interesa en particular el **límite** de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. El término a_n se denomina el n–**ésimo término** de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, en tanto que $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ es la n–**ésima suma parcial** de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ejemplo 9.3.2 (La serie geométrica)**.** *Una familia fundamental de ejemplos es la de las* **series geométricas***, es decir, las series de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ para cierto $r \in \mathbb{R}$.*

Ejemplo 9.3.3 (La serie armónica generalizada)**.** *Otra familia de ejemplos interesante es la de las* **series armónicas generalizadas** $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$*, donde $\alpha > 0$. En particular, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ se denomina la* **serie armónica**.

El interés por las series reales proviene del hecho de que algunos números y funciones reales importantes de la matemática se pueden representar por medio de series “simples”. Éste es el caso, por ejemplo, del número e.

Ejemplo 9.3.4 (El número e). *En la Sección 6.3.3 hemos definido el número e como el límite de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$.

9.3.1. Series convergentes

Como hemos mencionado, dada una serie real $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, nos interesa especialmente el **comportamiento asintótico** de la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En tal sentido, tenemos la siguiente definición.

Definición 9.3.5. *Diremos que una serie real* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** *si la sucesión de sumas parciales* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge. En tal caso, vamos a usar la notación* $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *para expresar el hecho de que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge a* $\alpha \in \mathbb{R}$*, esto es,* $\alpha := \lim_{n\to\infty} s_n$*. Asimismo, una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *que no converge se dice que* **diverge**.

Ejemplo 9.3.6 (Convergencia de la serie geométrica). *A fin de estudiar la convergencia de la serie geométrica* $\sum_{n\geq 0} r^n$*, observamos que la n–ésima suma parcial* s_n *es*

$$s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \qquad (si\ r \neq 1).$$

Si $|r| < 1$*, entonces* $(r^{n+1})_{n\geq 0}$ *converge a 0, por lo que* $(s_n)_{n\geq 0}$ *converge a* $1/(1-r)$*. Por otro lado, si* $|r| > 1$ *entonces* $(r^{n+1})_{n\geq 0}$ *tiende a infinito, y por lo tanto* $(s_n)_{n\geq 0}$ *tiende a infinito. Por último, en los casos* $r = \pm 1$ *es fácil ver que las series correspondientes no convergen. En consecuencia, tenemos que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \text{ para } |r| < 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \text{ diverge para } |r| \geq 1.$$

Son relativamente "pocos" los casos en los que se puede determinar explícitamente el límite de una serie dada. Como vemos en el ejemplo precedente, éste es el caso de las series geométricas. En el siguiente ejercicio exhibimos otros ejemplos.

Ejercicio 9.3.7. *Encontrar el límite de las siguientes series:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^{n-2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2} + 3^n}{6^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Ejemplo 9.3.8. *Resulta interesante analizar el comportamiento asintótico de las series* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$*, ya que, si bien éstas parecen bastantes similares a primera vista, sus comportamientos difieren significativamente.*

Observamos en primer lugar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ *diverge. En efecto, si* s_n *es la correspondiente n–ésima suma parcial, es decir,* $s_n := 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$*, entonces*

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{2}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{4}{8}} + \cdots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n \text{ veces}} = \frac{n+2}{2}.$$

Por lo tanto, $s_{2^n} \geq 1 + n/2$ *de donde, dado que* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es estrictamente creciente, concluimos que* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a infinito.*

Por otro lado, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ *converge. En efecto, los términos de cada suma parcial de índice par* s_{2n} *se pueden agrupar en la forma siguiente:*

$$s_{2n} = \Big(-1+\frac{1}{2}\Big)+\Big(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big)+\cdots+\Big(-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\Big).$$

Dado que los términos entre paréntesis son todos negativos, tenemos $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión* **decreciente**. *A su vez, cada suma parcial* s_{2n+1} *se puede expresar en la forma*

$$s_{2n+1} = -1+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)+\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\Big)+\cdots+\Big(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\Big).$$

Dado que los términos entre paréntesis son todos positivos, tenemos $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión* **creciente**. *Asimismo, tenemos que*

$$-1 \leq s_{2n+1} = s_{2n} - \frac{1}{2n+1} \leq s_{2n} \leq 0,$$

lo que demuestra que $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada inferiormente por* -1 *y* $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotada superiormente por* 0. *Así, concluimos que* $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergen. Por último, de la identidad* $s_{2n+1}-s_{2n} = -1/(2n+1)$ *deducimos que* $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$, *y en particular, que* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Series alternantes

La demostración de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ del Ejemplo 9.3.8 se puede generalizar significativamente, obteniéndose el conocido **criterio de Leibniz** para la convergencia de una serie alternante. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es **alternante** si el signo de b_n es distinto del de b_{n+1} para cada $n \geq 1$, o equivalentemente, si es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ o de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, siendo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{R}_{>0}$.

Lema 9.3.9 (Criterio de Leibniz). *Sea* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión* **decreciente** *de* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Entonces la serie alternante* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *converge.*

Ejercicio 9.3.10. *El objetivo del presente ejercicio es obtener una demostración del criterio de Leibniz para series alternantes.*

1. *Probar que la subsucesión de sumas parciales* $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *es decreciente.*
2. *Probar que la subsucesión de sumas parciales* $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *es creciente.*
3. *Demostrar que* $s_1 \leq s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_2$ *para cada* $n \geq 1$.
4. *Concluir que* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *converge.*

Ejercicio 9.3.11. *Estudiar la convergencia de las series* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

9.3.2. Criterio de Cauchy de convergencia

De los ejemplos anteriores se ve que demostrar que una serie converge o diverge puede ser complicado. El objetivo central de esta sección es obtener criterios simples que permitan deducir la convergencia o divergencia de una serie real $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en función de los términos de la misma. Dado que dicha convergencia o divergencia es de hecho la de la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sumas parciales $s_n := a_1 + \cdots + a_n$, una primera observación es que, por la completitud de $\mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Esta observación, que podría parecer poco interesante a primera vista, es útil debido a que la condición de ser una sucesión de Cauchy toma una forma particularmente simple en el caso de una sucesión de sumas parciales.

Más precisamente, sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie real y sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la correspondiente sucesión de sumas parciales. Tenemos entonces que, por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Tratándose de una sucesión de $\mathbb{R}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si y solo si es de Cauchy, es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|s_{n+k} - s_n| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$ y cada $k \geq 0$. Dado que $s_{n+k} - s_n = a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}$, obtenemos el siguiente criterio de convergencia.

Lema 9.3.12 (Criterio de Cauchy de convergencia)**.** *Una serie real $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

para cada $n \geq n_0$ y cada $k \geq 0$.

Ejemplo 9.3.13. *Consideramos la convergencia de la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. De acuerdo con el criterio de convergencia de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, deberíamos demostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$ y $k \geq 0$, entonces*

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+k)^2} < \varepsilon. \tag{9.3}$$

Para esto, teniendo en cuenta que $(n+1)^2 > n(n+1)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+k)^2} &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right). \end{aligned}$$

La última suma es "telescópica", esto es, los términos sucesivos se cancelan entre sí excepto el primer y el último sumando, por lo que resulta

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} = \frac{k}{n(n+k)} \leq \frac{1}{n}. \tag{9.4}$$

Así concluimos que si $n_0 > 1/\varepsilon$ y $n \geq n_0$, entonces (9.3) se satisface para cada $k \geq 0$. En consecuencia, el criterio de convergencia de Cauchy (Lema 9.3.12) asegura que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge.

Ejercicio 9.3.14. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de $\mathbb{R}$ y $0 \leq r < 1$. Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge.*

En lo que sigue vamos a extraer algunas consecuencias útiles del criterio de Cauchy de convergencia (Lema 9.3.12).

Dado que el límite de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nos informa sobre el comportamiento asintótico de la misma, sabemos que éste no cambia si modificamos una cantidad finita de términos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esto no es cierto en el caso de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ya que si modificamos un término, digamos a_{n_0}, todas las sumas parciales s_n con $n \geq n_0$ se modifican, dado que a_{n_0} es un sumando de cada una de ellas. Sin embargo, esta modificación no cambia la cualidad de ser o no **convergente** de la misma, como mostramos en el siguiente resultado.

Corolario 9.3.15. *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series reales que coinciden salvo en finitos términos, es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = b_n$ para todo $n \geq n_0$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Por el criterio de Cauchy de convergencia (Lema 9.3.12) tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_1$ y cada $k \geq 0$. Dado que $a_n = b_n$ para cada $n \geq n_0$, tenemos que

$$|b_{n+1} + \cdots + b_{n+k}| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

para cada $n \geq \max\{n_1, n_0\}$ y cada $k \geq 0$, lo que demuestra que, de acuerdo al criterio de Cauchy de convergencia, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge. □

Finalizamos la sección con otra consecuencia del criterio de Cauchy de convergencia.

Corolario 9.3.16. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales convergente. Entonces la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Dado que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, por el criterio de Cauchy de convergencia (Lema 9.3.12) tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$ y cada $k \geq 0$. En particular, fijando $k = 1$ concluimos que $|a_{n+1}| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$. Esto demuestra que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. □

Ejemplo 9.3.17. *Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. Observamos que la sucesión de términos $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a 0, de lo que concluimos, por el Corolario 9.3.16 precedente, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ no converge.*

Como hemos visto en el análisis de la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ (Ejemplo 9.3.8), no es cierta la recíproca del Corolario 9.3.16: la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, y sin embargo la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge.

Ejercicio 9.3.18 (Criterio de la integral). *En este ejercicio enunciamos un criterio útil de convergencia de ciertas series, conocido como el* **criterio de la integral**.

Sea $f : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}_{>0}$ una función decreciente.

1. *Demostrar que $f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq f(n+1)$ para cada $n \geq 1$.*

2. *Concluir que $\sum_{n=1}^{m} f(n) \geq \int_1^{m+1} f(x)dx \geq \sum_{n=2}^{m+1} f(n+1)$ para cada $m \geq 1$.*

3. *Deducir que* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *converge si y solo si existe* $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx$.

Ejercicio 9.3.19. *Determinar para cuáles valores de* $\alpha > 0$ *las siguientes series convergen:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n(\ln \ln n)^{\alpha}}.$$

9.3.3. Series absolutamente convergentes

Tal como la propia notación lo indica, es importante no perder de vista que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una **suma**. En tal sentido, cabe preguntarse hasta qué punto una serie, es decir, una "suma infinita", hereda las propiedades que satisfacen las sumas finitas. Una propiedad básica de las sumas finitas es la **conmutatividad**, es decir, el hecho de que el resultado de una suma finita no depende del orden en que se suman los términos. Desafortunadamente, **la "suma" de una serie puede depender del orden en que se suman sus términos**, como vemos en el ejemplo a continuación (ver, por ejemplo, [Kno56, §3.6] por una discusión general acerca de cuáles propiedades de sumas finitas continúan siendo válidas en el contexto de series infinitas).

Ejemplo 9.3.20. *Consideremos nuevamente la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$. *Observamos que converge a un número real menor que* $-1/2$. *Afirmamos que es posible reordenar esta serie de modo que converja a 0. En efecto, definimos* $a_1 := -1$, *como en la serie original. A continuación, ubicamos tantos términos positivos de la serie original como sea necesario para obtener una suma parcial positiva. Más precisamente, si definimos* $a_2 := 1/2$, $a_3 := 1/4$, $a_4 := 1/6$ *y* $a_5 := 1/8$, *vemos que* $a_1 + \cdots + a_4 < 0$ *y* $a_1 + \cdots + a_5 > 0$. *Luego definimos* $a_6 := -1/3$, *el siguiente término negativo de la serie original. Posteriormente, agregamos los siguientes términos positivos de la serie original hasta que obtengamos nuevamente una suma parcial positiva. De hecho, basta con agregar* $a_7 := 1/10$, $a_8 := 1/12$, $a_9 := 1/14$ *y* $a_{10} := 1/16$. *Así sucesivamente vamos sumando todos los términos de la serie original, de forma tal que la sucesión de sumas parciales* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *oscila en torno a 0, y por lo tanto, converge a 0.*

Veamos esta última afirmación con más detalle. Supongamos que $s_{n-1} < 0$ *y* $s_n \geq 0$ *para cierto* $n \in \mathbb{N}$ *(por ejemplo, podría ser* $n = 5$ *o* $n = 10$*). Esto significa, por construcción, que* $a_n > 0$ *y* $a_{n+1} < 0$. *Tenemos entonces que:*

- $s_n \leq |a_{n+1}|$, *ya que* $s_n \leq a_n < |a_{n+1}|$, *dado que* $a_n > 0$, $a_{n+1} < 0$ *y "avanzamos" más rápido con los términos positivos que con los negativos,*
- $|s_{n+1}| \leq |a_{n+1}|$.

La estimación $|s_{n+k}| \leq |a_{n+1}|$ *es válida para todas las sumas parciales negativas a continuación de* s_n, *en tanto éstas no cambien de signo, dado que sumamos términos positivos a* s_{n+1} *hasta que haya un cambio de signo. Cuando esto ocurra, con el mismo argumento podremos estimar el valor absoluto de las siguientes sumas parciales por el valor absoluto* $|a_{n+k}|$ *del siguiente término negativo. Por lo tanto, la sucesión* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a 0. En conclusión,* **la reordenación de la serie** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ **resulta en una serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **que converge a un valor distinto que** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$.

¿Cómo se puede explicar el fenómeno del ejemplo precedente? Básicamente ocurre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ converge gracias a un fenómeno muy importante de **cancelación** entre los sucesivos términos de la serie, debido fundamentalmente a que se trata de una serie alternante (como asegura el criterio de Leibniz, Lema 9.3.9). Por lo tanto, si los términos de la serie se reordenan, se altera la forma en que se cancelan los términos en las correspondientes sumas parciales y, en consecuencia, la serie resultante puede converger a otro valor, o incluso diverger.

Así, una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cuya convergencia depende del orden de los términos a_n es una serie que, en algún sentido, "no representa la suma infinita de sus términos", dado que dicha "suma" varía, o incluso pierde sentido, si se cambia dicho orden. De hecho, es posible demostrar que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, existe una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que converge a α, lo que muestra que el número real al cual converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene "poco significado" en función del conjunto de términos $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ en consideración (una demostración de este hecho puede obtenerse generalizando los argumentos del Ejemplo 9.3.20; ver, por ejemplo, [Spi92, Capítulo 22, Teorema 2]). Por otro lado, si el fenómeno de cancelación no juega un papel preponderante en la convergencia de la serie en consideración, entonces, como vamos a ver más adelante, el valor al cual dicha serie converge no depende del orden de los términos, y por lo tanto tiene un significado "intrínseco" en términos del conjunto de términos $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Plasmar la noción que describe este comportamiento es el objetivo de nuestra siguiente definición.

Definición 9.3.21. *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se dice* **absolutamente convergente** *si la serie de valores absolutos* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge.*

Ejemplo 9.3.22. *Toda serie de números reales positivos convergente es absolutamente convergente. La serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^2$ *es absolutamente convergente, en tanto que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ *no lo es.*

De nuestra discusión anterior a la definición de convergencia absoluta debería concluirse que una serie absolutamente convergente necesariamente converge. Dado que esto no se deduce directamente de la definición, lo demostramos a continuación.

Lema 9.3.23. *Si una serie real es absolutamente convergente, entonces es convergente.*

Demostración. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie real absolutamente convergente. A fin de demostrar que es convergente vamos a aplicar el criterio de Cauchy de convergencia (Lema 9.3.12). Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+k}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$ y cada $k \geq 0$. Esto en particular implica que $|a_{n+k} + \cdots + a_n| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$ y cada $k \geq 0$, de lo cual, gracias al criterio de Cauchy de convergencia, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

Consideramos ahora el resultado principal de esta sección: **la suma de una serie absolutamente convergente no varía por reordenaciones de sus términos**. La idea puede ilustrarse a partir del análisis de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Dado $\varepsilon > 0$, de acuerdo con (9.4) tenemos que, si $n \geq 1/\varepsilon$, entonces

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+k)^2} < \varepsilon$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Fijemos por ejemplo $\varepsilon = 0{,}001$, en cuyo caso resulta

$$\frac{1}{(1001)^2} + \cdots + \frac{1}{(1000+k)^2} < 0{,}001$$

para cada $k \geq 0$. En particular, tomando límite cuando k tiende a infinito, por el principio de conservación del número (Lema 3.1.40) concluimos que

$$\sum_{n=1001}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 0{,}001.$$

Así, el valor límite $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ está determinado, a menos de 0,001, por la suma de los primeros 1000 términos. Esto explica que el valor límite de la suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ no cambia si reordenamos sus términos: en cuanto consideremos una suma parcial de la serie reordenada que incluya estos primeros 1000 términos de la suma original, sabremos que tenemos el valor límite a menos de 0,001. En términos generales, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 9.3.24. *La suma de una serie absolutamente convergente no depende del orden, es decir,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *para toda biyección* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ y $s'_n := \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$ las n–ésimas sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y de la reordenación $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ respectivamente. Fijemos $\varepsilon > 0$. Dado que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| s_{n_0} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| < \varepsilon. \tag{9.5}$$

A su vez, por el criterio de Cauchy de convergencia (Lema 9.3.12) podemos elegir n_0 suficientemente grande como para que

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| \leq \varepsilon \tag{9.6}$$

para cada $n \geq n_0$ y cada $k \geq 1$.

Sea $m_0 := \text{máx}\{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(n_0)\}$. Por la definición de m_0 tenemos que si $\sigma(k) \in \{1, \ldots, n_0\}$, entonces $k \leq m_0$, o equivalentemente, si $k > m_0$ entonces $\sigma(k) > n_0$.

Fijemos $m \geq m_0$ y analicemos la diferencia $|s'_m - s_{n_0}|$. Siendo $m \geq m_0$, todos los términos $a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(m_0)}$ aparecen en la suma s'_m. Asimismo, por la definición de m_0, éstos incluyen todos los términos $a_1, \ldots, a_{n_0}$, que también aparecen en la suma s_{n_0}. En consecuencia, estos términos se cancelan en la resta $s'_m - s_{n_0}$, que por ende resulta una suma de términos a_k con $k > n_0$. De (9.5) y (9.6) concluimos que

$$\left| s'_m - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq |s'_m - s_{n_0}| + \left| s_{n_0} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq 2\varepsilon$$

para cada $m \geq m_0$ y cada $n \geq n_0$. Esto prueba que la sucesión $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es decir, que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$, como queríamos demostrar. □

Una serie real convergente que no converge absolutamente se denomina **condicionalmente convergente**.

Ejercicio 9.3.25. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie real condicionalmente convergente.*

1. *Demostrar que existen infinitos términos $a_n > 0$ e infinitos términos $a_n < 0$.*

2. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ es la serie formada por los términos positivos y $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ consiste de los términos negativos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, entonces ambas series divergen.*

3. **(optativo)** *Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede ser reordenada de manera que converja a cualquier número real α.*

Ejercicio 9.3.26. *Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge (absolutamente).*

Algunos criterios de convergencia absoluta

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, un problema básico es determinar si ésta converge o diverge. En lo que sigue damos un criterio que permite decidir esta cuestión "por comparación".

Teorema 9.3.27 (Criterio de comparación). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una serie real absolutamente convergente. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathbb{R}$ tal que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $|a_n| \leq |b_n|$ para cada $n \geq n_0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.*

Demostración. A fin de demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente vamos a aplicar el criterio de Cauchy de convergencia (Lema 9.3.12). Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ converge, existe $n_1 > 0$ tal que $|b_n| + \cdots + |b_{n+k}| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_1$ y cada $k \geq 0$. Esto implica que $|a_n| + \cdots + |a_{n+k}| \leq |b_n| + \cdots + |b_{n+k}| < \varepsilon$ para cada $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ y cada $k \geq 0$, de lo cual, gracias al criterio de Cauchy de convergencia, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. □

Ejemplo 9.3.28. *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n/(n^3 + 2\sqrt{n})$ converge absolutamente. En efecto,*

$$0 \leq \frac{\ln n}{n^3 + 2\sqrt{n}} \leq \frac{\ln n}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge absolutamente (Ejemplo 9.3.13), concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n/(n^2 + 3\sqrt{n})$ también lo hace.

El siguiente resultado es de hecho un caso particular del criterio de comparación: se trata de comparar la serie en consideración con una serie geométrica adecuada. Este criterio, por medio del cual ya demostramos la convergencia de ciertas sucesiones a 0 (ver el Ejercicio 3.1.15), resulta particularmente útil para series en las cuales los términos incluyen factores exponenciales, como ocurre con frecuencia.

Teorema 9.3.29 (Criterio del cociente). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie real tal que existe el límite $\ell := \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n|$.*

- *Si $\ell < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.*
- *Si $\ell > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\ell < 1$ y fijemos $\ell < \ell' < 1$. Entonces, dado que $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = \ell$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}|/|a_n| < \ell'$, o equivalentemente $|a_{n+1}| \leq \ell'|a_n|$, para cada $n \geq n_0$. De esto se deduce, inductivamente, que $|a_{n+k}| < |a_n|(\ell')^k$ para cada $n \geq n_0$ y cada $k \geq 0$. Por lo tanto, si $m \geq n_0$, resulta

$$\sum_{n=n_0}^{m} |a_n| \leq \sum_{n=n_0}^{m} |a_{n_0}|(\ell')^{n-n_0} = \sum_{n=0}^{m-n_0} |a_{n_0}|(\ell')^n. \tag{9.7}$$

Dado que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n_0}|(\ell')^n$ converge, el criterio de comparación (Teorema 9.3.27) asegura que $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, y por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ también lo hace.

Por otro lado, si $\ell > 1$, dado que $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = \ell$, fijando $\ell > \ell' > 1$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}|/|a_n| > \ell'$ para cada $n \geq n_0$. Inductivamente deducimos que $|a_{n+1}| > |a_{n_0}|(\ell')^{n-n_0}$ para cada $n \geq n_0$. Esto implica que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a 0, por lo cual, de acuerdo con el Corolario 9.3.16, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. □

Ejemplo 9.3.30. *La serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n/n!$ converge para cada $r \in \mathbb{R}$. En efecto, si estudiamos los cocientes $|a_{n+1}|/|a_n|$ de los términos de dicha serie, tenemos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}/(n+1)!}{r^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1} = 0 < 1.$$

En consecuencia, el criterio del cociente asegura que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n/n!$ converge.

Otro criterio útil es el siguiente criterio de la raíz enésima, que ya hemos utilizado a fin de demostrar la convergencia de algunas sucesiones a 0 (Lema 7.1.19).

Teorema 9.3.31 (Criterio de la raíz enésima). *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie real tal que existe el límite $\ell := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.*

- *Si $\ell < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.*
- *Si $\ell > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\ell < 1$ y fijemos $\ell < \ell' < 1$. Entonces, dado que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < \ell'$ para cada $n \geq n_0$. Por lo tanto, $|a_n| < (\ell')^n$ para cada $n \geq n_0$, de lo que deducimos que, si $m \geq n_0$, entonces

$$\sum_{n=n_0}^{m} |a_n| \leq \sum_{n=n_0}^{m} (\ell')^n.$$

Dado que $\sum_{n=n_0}^{\infty} (\ell')^n$ converge, el criterio de comparación (Teorema 9.3.27) implica que $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también lo hace.

La demostración de la segunda afirmación es similar a la demostración de la correspondiente afirmación en el criterio del cociente (Teorema 9.3.29). □

Ejemplo 9.3.32. *Si $0 \leq \ell < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} n\ell^n$ converge absolutamente: dado que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\ell^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,\ell = \ell < 1,$$

el criterio de la raíz enésima asegura que $\sum_{n=0}^{\infty} n\,\ell^n$ converge absolutamente.

Ejercicio 9.3.33. *Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, siendo:*

$$a_n := \frac{3^n}{n2^n}, \quad a_n := \frac{n!}{10^n}, \quad a_n := \frac{2n!}{n^n}, \quad a_n := \frac{1}{\ln n}, \quad a_n := \frac{1}{n\ln n}, \quad a_n := n^k e^{-n}\,(k \in \mathbb{N}).$$

Ejercicio 9.3.34. *Sabiendo que $1 \leq a_{n+1}/a_n \leq 2$ para cada $n \in \mathbb{N}$, probar que las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n!$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/e^n$ son convergentes.*

9.3.4. Aproximación de números reales por medio de series

Como hemos dicho, muchos números reales importantes poseen representaciones "simples" por medio de series. Éste es el caso, por ejemplo, del número e, al cual hemos definido en la forma $e := \sum_{n\geq 0} 1/n!$. En particular, tales representaciones nos permiten **aproximar** el número real en cuestión con una suma parcial adecuada. De hecho, en el caso de e, siendo $s_n := 1 + 1/1! + \cdots + 1/n!$ para cada $n \geq 0$, en la Tabla 6.1 hemos listado los valores de s_n para $1 \leq n \leq 11$ y hemos observado que el desarrollo decimal de $s_{11} = 2{,}718281828\ldots$ coincide con el de e en sus primeros 9 dígitos decimales. A fin de determinar si tales aproximaciones son "confiables" es importante poder estimar el error que cometemos cuando aproximamos a un número real α, representado por una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con una suma parcial $s_n := a_1 + \cdots + a_n$. El propósito de esta sección es discutir resultados en esta dirección, para lo cual vamos a seguir [DB08, Chapter 3].

Supongamos que queremos aproximar un número real α, que viene dado por una serie real $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, esto es, $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denominamos $r_n := \alpha - s_n$ al n–ésimo **resto** o **error** de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Nuestro propósito es obtener estimaciones sobre $|r_n| = |\alpha - s_n|$.

Estimación por comparación con una serie geométrica

Comenzamos observando que, como hemos mencionado, la demostración del criterio del cociente (Teorema 9.3.29) y de la raíz enésima (Teorema 9.3.31) procede por comparación de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en consideración con una serie geométrica convergente. Esta idea nos permite a su vez obtener estimaciones para $|r_n|$. En efecto, supongamos, por ejemplo, que podemos aplicarle el criterio del cociente a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, o más generalmente, que existe $0 \leq \ell < 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $|a_{n+1}| \leq \ell |a_n|$ para cada $n \geq n_0$. Argumentando como en la demostración del criterio del cociente (Teorema 9.3.29), obtenemos la siguiente estimación análoga a (9.7) para cada $n \geq n_0$:

$$|r_n| = \left| \sum_{m\geq n+1} a_m \right| \leq \sum_{m\geq n+1} |a_m| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_{n+1}|\,\ell^{m-n-1} = |a_{n+1}| \sum_{m=0}^{\infty} \ell^m = \frac{|a_{n+1}|}{1-\ell} \leq \frac{\ell |a_n|}{1-\ell}.$$

De esta manera, obtenemos una estimación para el error $|r_n|$ que cometemos al aproximar α por la n–ésima suma parcial s_n. Más aún, si $\ell < 1/2$ entonces $|r_n| < |a_n|$, con lo cual tenemos que **el error cometido es menor que el valor absoluto del último término incluido** en la estimación. En resumen, tenemos el siguiente enunciado.

Lema 9.3.35 (Estimación por comparación con una serie geométrica)**.** *Sea $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y supongamos que existen $0 \leq \ell < 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $|a_{n+1}| \leq \ell |a_n|$ para cada $n \geq n_0$. Si $s_n :=$*

$a_1+\cdots+a_n$ y $r_n := \alpha - s_n$, para cada $n \geq n_0$ tenemos que

$$|r_n| \leq \frac{1}{1-\ell}|a_{n+1}| \leq \frac{\ell}{1-\ell}|a_n|. \tag{9.8}$$

Más aún, si $\ell < 1/2$, entonces $|r_n| < |a_n|$.

Ejemplo 9.3.36. *Si consideramos la aproximación del número e por medio de las sumas parciales $s_n := 1+1/1!+\cdots+1/n!$, observamos que*

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1}|a_n|.$$

En particular, tenemos que $|a_{n+1}| \leq (12)^{-1}|a_n|$ para cada $n \geq 11$. En consecuencia, por el Lema 9.3.35 vemos que el error $|r_{11}|$ que cometemos al aproximar e por la suma parcial s_{11} se puede estimar por

$$|r_{11}| \leq \frac{1}{1-12^{-1}}|a_{12}| = \frac{12}{11}\cdot\frac{1}{12!} = \frac{1}{11!} \approx 0{,}25\cdot 10^{-7}.$$

Esta estimación "predice" que s_{11} aproxima al número e con unos 7 dígitos decimales correctos, predicción que resulta relativamente cercana a los 9 dígitos decimales de e que de hecho provee s_{11}.

Ejercicio 9.3.37. *Sea $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y supongamos que existen $0 \leq \ell < 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \ell$ para cada $n \geq n_0$. Demostrar que $|r_n| \leq \ell^{n+1}/(1-\ell)$ para cada $n \geq n_0$.*

Estimación por comparación con una integral

Otro criterio de convergencia de series que hemos discutido es el de la integral (Ejercicio 9.3.18): si $f : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}_{>0}$ es una función decreciente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge si y solo si existe el límite de $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx$. A fin de demostrarlo, hemos sugerido tener en cuenta las desigualdades

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n) \tag{9.9}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Reinterpretando adecuadamente la demostración del criterio de la integral podemos obtener estimaciones sobre el error $|r_n| := |\alpha - s_n|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, siendo $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ y $s_n := f(1)+\cdots+f(n)$. En efecto, a partir de (9.9) vemos que

$$|r_n| = \left|\sum_{m=n+1}^{\infty} f(m)\right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} |f(m)| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \int_{m-1}^{m} f(x)dx = \int_n^{\infty} f(x)dx. \tag{9.10}$$

Más aún, de (9.9) también podemos obtener cotas inferiores sobre el error: dado que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ es una serie de términos positivos, si converge, su límite α será necesariamente el supremo de la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Lema 9.2.1), y en consecuencia, $|r_n| = r_n = \alpha - s_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$|r_n| = r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} f(m) \geq \sum_{m=n+1}^{\infty} \int_m^{m+1} f(x)dx = \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx. \tag{9.11}$$

Asimismo, la cota superior (9.10) resulta válida para cualquier serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $|a_n| \leq f(n)$ para $n \geq n_0$, en tanto que la cota inferior (9.11) vale para cualquier serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $a_n \geq f(n)$ para $n \geq n_0$. En resumen, tenemos el siguiente enunciado.

Lema 9.3.38 (Estimación por comparación con una integral)**.** *Sea* $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *de modo que* $|a_n| \leq f(n)$ *para cada* $n \geq n_0$*, siendo* $f : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}_{>0}$ *una función decreciente. Si* $r_n := \alpha - s_n$ *y* $s_n := a_1 + \cdots + a_n$*, entonces, para cada* $n \geq n_0$ *tenemos que*

$$|r_n| \leq \int_n^{\infty} f(x)dx.$$

Asimismo, si $a_n \geq g(n)$ *para cada* $n \geq n_0$*, siendo* $g : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *una función decreciente, entonces, para cada* $n \geq n_0$*, tenemos que*

$$r_n \geq \int_{n+1}^{\infty} g(x)dx.$$

Ejemplo 9.3.39. *Consideramos la suma de la serie armónica* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$*. En el Ejemplo 9.3.13 hemos demostrado que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ *converge, conclusión a la que también puede arribarse por medio del criterio de la integral (ver el Ejercicio 9.3.18). De acuerdo con las estimaciones por comparación con una integral (Lema 9.3.38), tenemos que, si* $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ *es la suma de la serie y* $r_n := \alpha - s_n$ *es el error que cometemos aproximando* α *por la n–ésima suma parcial* s_n*, entonces*

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx \leq r_n \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{x^2}dx.$$

Dado que

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_{n+1}^{\infty} = \frac{1}{n+1} \quad y \quad \int_n^{\infty} x^{-2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_n^{\infty} = \frac{1}{n}.$$

Vemos entonces que, a efectos de determinar, digamos, **los primeros 4 dígitos decimales** *de* α *(que, cabe destacar, resulta igual a* $\pi^2/6$*; ver [Kal93], [Kor96]o [Hof02]), es necesario* **sumar al menos los primeros 10000 términos** *de dicha serie.*

Ejercicio 9.3.40. *Para las siguientes series* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, determinar cotas superiores e inferiores sobre el error de aproximar la suma* $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *por la n–ésima suma parcial:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

Determinar cotas inferiores sobre el mínimo valor de $n \in \mathbb{N}$ *para el cual la n–ésima suma parcial* s_n *y su límite* α *coinciden en los primeros 4 dígitos decimales. ¿Qué conclusiones se deducen de la comparación entre las 3 cotas?*

Estimaciones para series alternantes

También hemos visto el criterio de Leibniz para la convergencia de una serie alternante: la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_{>0}$ es decreciente y converge a 0 (Lema 9.3.9). En esta sección nos proponemos obtener estimaciones sobre el error que cometemos al aproximar un número real definido por una serie alternante con una suma parcial dada.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una serie alternante. Como hemos visto en la demostración del criterio de convergencia de Leibniz (Ejercicio 9.3.10), si $b_1 \leq 0$, entonces

- la sucesión de sumas parciales $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente;
- la sucesión de sumas parciales $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente;
- ambas sucesiones convergen a $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

En particular, vemos que

$$s_{2n-1} \leq \alpha \leq s_{2n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, de lo que podemos sacar varias conclusiones interesantes. En primer lugar, dado que $s_{2n} - s_{2n-1} = b_{2n}$, concluimos que

$$0 \leq s_{2n} - \alpha \leq b_{2n} \quad \text{y} \quad 0 \leq \alpha - s_{2n-1} \leq b_{2n}.$$

Asimismo, teniendo en cuenta que el intervalo $[s_{2n-1}, s_{2n}]$ tiene longitud b_{2n} y $\alpha \in [s_{2n-1}, s_{2n}]$, su punto medio $(s_{2n-1} + s_{2n})/2$ difiere de α en, a lo sumo, la mitad de la longitud $(s_{2n} - s_{2n-1})/2$ de dicho intervalo, esto es,

$$\left|\alpha - \frac{1}{2}(s_{2n-1} + s_{2n})\right| \leq \frac{1}{2} b_{2n}.$$

Conclusiones similares se obtienen suponiendo que $b_1 \geq 0$. En resumen, tenemos el siguiente resultado.

Lema 9.3.41 (Estimaciones para series alternantes)**.** *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ una serie alternante tal que la sucesión $(|b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y converge a 0. Si $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es la suma de la serie, $s_n := b_1 + \cdots + b_n$ y $r_n := \alpha - s_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\left|\alpha - \frac{1}{2}(s_n + s_{n+1})\right| \leq \frac{1}{2}|b_{n+1}|.$$

Asimismo, tenemos que $|r_n| \leq |b_{n+1}|$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 9.3.42. *Consideremos nuevamente la serie alternante $\sum_{n=1}(-1)^n/n$, la cual, de acuerdo con el criterio de Leibniz (Lema 9.3.9), converge. La estimación para series alternantes dice que, si α es la suma infinita de la serie $\sum_{n=1}(-1)^n/n$, entonces*

$$\left|\alpha - \frac{1}{2}(s_n + s_{n+1})\right| \leq \frac{1}{2(n+1)} \quad y \quad |\alpha - s_n| < \frac{1}{2(n+1)}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Cabe observar que $\alpha = \ln(2)$ (ver, por ejemplo, [Zhe02] por una demostración elemental de este hecho).

9.A. Apéndice. La completitud y los cuerpos ordenados

Como hemos visto en relación con nuestra discusión sobre la solubilidad de la ecuación $x^2 = 2$ (Capítulo 6), de ecuaciones polinomiales (Capítulo 7) y de los problemas modelo (Capítulo

8), las tres hipótesis de completitud son propiedades que deberían resultar válidas en **cualquier dominio razonable** para "hacer análisis". Sin embargo, ninguna de las tres hipótesis es válida en $\mathbb{Q}$, y en tal sentido, $\mathbb{Q}$ resulta **incompleto**, es decir, $\mathbb{Q}$ "carece de los elementos necesarios" como para garantizar que tres hechos intuitivamente ciertos, como las hipótesis de completitud, resulten válidas. De hecho, la sucesión de intervalos de bisección $(I_n)_{n>0}$ de $x^2 = 2$ **debería intersecarse** en un punto, ya que se trata de intervalos **cerrados, acotados y encajados** cuya longitud tiende a 0. El problema es que este punto "falta" en $\mathbb{Q}$, lo que explica que dicha intersección resulte vacía en $\mathbb{Q}$. Análogamente, tanto la sucesión $(c_n)_{n>0}$ de puntos medios del método de bisección como la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton, aplicados a la ecuación $x^2 = 2$, tienen el **comportamiento de una sucesión convergente**, es decir, los términos sucesivos resultan cada vez más cercanos entre sí, pero los hipotéticos límites de $(c_n)_{n\geq 0}$ y $(a_n)_{n\geq 0}$ "faltan" en $\mathbb{Q}$, lo que explica que estas sucesiones no converjan.

Así, hemos **completado** a $\mathbb{Q}$ a fin de evitar estos comportamientos "anómalos", obteniendo de esta manera $\mathbb{R}$, el cuerpo ordenado completo de los números reales, para lo cual hemos adjuntado a $\mathbb{Q}$ todos los desarrollos decimales "irracionales". Cabe preguntarse si es posible realizar esta completación de otra manera, es decir, si existen otros dominios que extienden a $\mathbb{Q}$ y contienen los elementos que "faltan" en $\mathbb{Q}$, que a la vez poseen una **estructura aritmética** y un **orden** compatible con las operaciones aritméticas, a partir de los cuales tenemos una **noción de distancia**, que es central para las ideas de aproximación y convergencia. El propósito del presente apéndice es demostrar que **todas las posibles completaciones de $\mathbb{Q}$ conducen a modelos equivalentes al del cuerpo ordenado completo de los números reales**.

9.A.1. Extensiones de $\mathbb{Q}$

Supongamos que agregamos algunos elementos a $\mathbb{Q}$ (más adelante vamos a discutir cuáles elementos es necesario agregar), obteniendo de esta manera un nuevo dominio R, que contiene a $\mathbb{Q}$. Naturalmente, quisiéramos poder operar con los elementos de este dominio R en la forma "esperable", es decir, deberíamos tener una operación de "suma" $+$ y una de "producto" $\cdot$, esto es,

$$+ : R \times R \to R, \quad \cdot : R \times R \to R,$$

que extienden las operaciones de suma y producto de $\mathbb{Q}$ y se "comportan" de forma "natural", es decir, satisfacen las siguientes condiciones:

- La suma es asociativa y conmutativa, $0 \in \mathbb{Q}$ es el único elemento neutro para la suma en R y todo elemento de R posee un único inverso aditivo.
- El producto es asociativo y conmutativo, $1 \in \mathbb{Q}$ es el único elemento neutro para el producto en R y todo elemento de R distinto de 0 posee un único inverso multiplicativo.
- Vale la ley distributiva.

En otras palabras, nuestro dominio R debería ser un **cuerpo**, y de hecho, una **extensión** de $\mathbb{Q}$, en el sentido de que las operaciones de suma y producto sobre R restringidas a elementos $\mathbb{Q}$ coinciden con las propias operaciones de $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 9.A.1 (El cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$). *Dado que nos hemos convencido de la necesidad de agregar la solución positiva de la ecuación $x^2 = 2$, cabría preguntarse de qué elementos consiste el cuerpo R que obtenemos si agregamos a $\mathbb{Q}$ dicha solución, que representamos con el símbolo $\sqrt{2}$.*

Como R es un cuerpo, debe contener todas las **expresiones algebraicas** *formadas a partir de sumas y productos de números racionales con $\sqrt{2}$, esto es,*

$$\left\{a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2(\sqrt{2})^2 + \cdots + a_n(\sqrt{2})^n : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Sin embargo, no todas estas expresiones son distintas. En efecto, tenemos que $(\sqrt{2})^2 = 2$, lo cual nos permite simplificar el tipo de expresiones que aparecen en R: si $n = 2k$, entonces $(\sqrt{2})^n = 2^k \in \mathbb{Q}$, en tanto que si $n = 2k+1$, entonces $(\sqrt{2})^n = 2^k\sqrt{2}$, de lo que concluimos que el conjunto de expresiones que es necesario considerar es

$$\left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Todas estas expresiones son distintas ya que, si fuera $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ con $b \neq d$, entonces $\sqrt{2} = (c-a)/(b-d)$ sería racional. Por lo tanto, debe ser $b = d$, de donde se deduce fácilmente que $a = c$.

Es fácil operar con este tipo de expresiones. Más precisamente, si definimos la suma y el producto de la forma "natural", es decir,

$$\begin{aligned} \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left(c + d\sqrt{2}\right) &:= (a+c) + (b+d)\sqrt{2}, \\ \left(a + b\sqrt{2}\right) \cdot \left(c + d\sqrt{2}\right) &:= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}, \end{aligned} \tag{9.12}$$

la suma y el producto resultan asociativos y conmutativos, vale la ley distributiva, la suma tiene a $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ como elemento neutro, el producto tiene a $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ como elemento neutro y todo elemento $a + b\sqrt{2}$ tiene un único inverso aditivo $-a - b\sqrt{2}$.

Más aún, todo elemento $a + b\sqrt{2} \in R$ distinto de 0 tiene inverso multiplicativo. En efecto, observamos que $a^2 - 2b^2 \neq 0$, ya que, en caso contrario, sería $a^2/b^2 = 2$, es decir, tendríamos una solución racional de la ecuación $x^2 = 2$. Por lo tanto,

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{a^2 - 2b^2}\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a - b\sqrt{2}\right) = 1 + 0\sqrt{2}.$$

En conclusión, el conjunto

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\right\},$$

con las operaciones de suma y producto definidas como en (9.12), resulta un cuerpo, la extensión de $\mathbb{Q}$ que se obtiene adjuntando $\sqrt{2}$.

Ejemplo 9.A.2 (El cuerpo $\mathbb{Q}(x)$). *Supongamos ahora que queremos agregar una* **indeterminada** *x a $\mathbb{Q}$. Razonando como en el ejemplo anterior, si R es el cuerpo obtenido al adjuntar x a $\mathbb{Q}$, entonces R debe contener todas las expresiones algebraicas formadas a partir de sumas y productos*

de racionales con x, es decir, el conjunto

$$\mathbb{Q}[x] := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\}.$$

Dado que x es una indeterminada, todas estas expresiones son distintas. La suma y el producto usual en $\mathbb{Q}[x]$ *resultan asociativos y conmutativos, vale la ley distributiva, el polinomio constante* 0 *es el elemento neutro para la suma, el polinomio constante* 1 *es el elemento neutro para el producto y todo elemento* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ *tiene inverso aditivo* $-a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n$.

Sin embargo, los polinomios de $\mathbb{Q}[x]$ *no constantes no tienen inverso multiplicativo, por lo que es necesario considerar el conjunto de los* **cocientes de polinomios** *con denominador no nulo, es decir,*

$$\left\{\frac{P}{Q} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n} : a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}, b_n \neq 0\right\},$$

identificando, como usualmente, dos cocientes P_1/Q_1 *y* P_2/Q_2 *si* $P_1Q_2 = P_2Q_1$. *Así, obtenemos el conjunto de las* **funciones racionales** $\mathbb{Q}(x)$, *que, con las operaciones de suma y producto definidas como habitualmente, resulta un cuerpo.*

Cuerpos ordenados

Otra característica esencial de cualquier extensión "razonable" R de $\mathbb{Q}$ es la de poseer un **orden** que **extiende el de** $\mathbb{Q}$, es decir, una relación $\leq$ entre elementos de R que satisface las condiciones:

- $\alpha \leq \alpha$ para cada $\alpha \in R$ (reflexividad);
- $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma$ implica $\alpha \leq \gamma$ para cada $\alpha, \beta, \gamma \in R$ (transitividad);
- $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$ implica $\alpha = \beta$ para cada $\alpha, \beta \in R$ (antisimetría);
- $\leq$ restringido a elementos de $\mathbb{Q}$ coincide con el orden de $\mathbb{Q}$.

Más aún, en las demostraciones hemos asumido en particular que el **orden** es **lineal** o **total**, en el sentido de que dos elementos cualesquiera $\alpha, \beta \in R$ son comparables: o bien $\alpha \leq \beta$ o $\beta \leq \alpha$. Esta propiedad **no se deduce** directamente del hecho de que $\leq$ es una relación de orden: por ejemplo, la relación de "inclusión" entre los subconjuntos de un conjunto A (S_1 está relacionado con S_2 si y solo si $S_1 \subset S_2$) es una relación de orden en la cual existen pares de elementos incomparables.

Finalmente, a fin de poder operar con inecuaciones como usualmente, es necesario que la relación de orden sea **compatible con las operaciones aritméticas** de R, es decir,

1. si $\alpha \leq \beta$, entonces $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ para todo $\gamma \in R$;
2. si $\alpha \leq \beta$ y $\gamma \geq 0$, entonces $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Ejemplo 9.A.3 (Continuación del Ejemplo 9.A.1)**.** *Consideremos nuevamente el cuerpo* $R := \mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. *Queremos establecer una noción de orden total en R que extienda la de* $\mathbb{Q}$ *y resulte compatible con la estructura de cuerpo de* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. *Dado que nuestra intención ha sido la de agregar una solución* **positiva** *de la ecuación* $x^2 = 2$, **definimos que** $\sqrt{2}$ **es positivo**.

Como se trata de extender el orden de $\mathbb{Q}$ de manera que el orden que definamos resulte compatible con la estructura de cuerpo de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, necesariamente debemos tener que

$$\sqrt{2} \geq a \text{ si y solo si } 2 \geq a^2$$

para cada $a \in \mathbb{Q}_{>0}$. De esto se deduce que

$$a+b\sqrt{2} \geq 0 \text{ si y solo si } \begin{cases} a \geq 0 \text{ y } b \geq 0, \text{ o bien} \\ a \leq 0,\ b \geq 0 \text{ y } 2b^2 \geq a^2, \text{ o bien} \\ a \geq 0,\ b \leq 0 \text{ y } a^2 \geq 2b^2. \end{cases}$$

Es fácil ver, considerando caso por caso, que esta definición de "positividad" en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ resulta compatible con la estructura de cuerpo de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, y todo elemento de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es positivo, es igual a 0, o su inverso aditivo es positivo. Habiendo definido cuáles elementos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ son positivos, es fácil determinar el único orden de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ compatible con esta definición de positividad:

$$a+b\sqrt{2} \geq c+d\sqrt{2} \text{ si y solo si } \begin{cases} a \geq c \text{ y } b \geq d, \text{ o bien} \\ a \leq c,\ b \geq d \text{ y } 2(b-d)^2 \geq (a-c)^2, \text{ o bien} \\ a \geq c,\ b \leq d \text{ y } (a-c)^2 \geq 2(b-d)^2. \end{cases}$$

Ejemplo 9.A.4 (Continuación del Ejemplo 9.A.2)**.** *Sea $R := \mathbb{Q}(x)$, el cuerpo de las funciones racionales en la variable x. A fin de definir un orden en $\mathbb{Q}(x)$ basta decir cómo "se ordena" a x: diremos* **arbitrariamente** *que $a > x > 0$ para todo $a \in \mathbb{Q}_{>0}$. En otras palabras, estamos diciendo que x es un elemento* **infinitesimal**. *A partir de esta definición, obtenemos la siguiente noción de positividad en $\mathbb{Q}[x]$: si $a_{n_0} \neq 0$, entonces*

$$a_{n_0}x^{n_0} + a_{n_0+1}x^{n_0+1} + \cdots + a_{n_0+m}x^{n_0+m} \geq 0 \text{ si y solo si } a_{n_0} \geq 0,$$

que se extiende fácilmente a una única noción de positividad "total" en $\mathbb{Q}(x)$ compatible con la estructura de cuerpo de $\mathbb{Q}(x)$. Por último, definimos que

$$\frac{P_1}{Q_1} \geq \frac{P_2}{Q_2} \text{ si y solo si } \frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_2}{Q_2} \geq 0.$$

Este orden tiene algunas propiedades poco "intuitivas". Una de ellas, particularmente relevante para todo lo que hemos hecho hasta ahora, es que la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ **no converge a** 0 *en $\mathbb{Q}(x)$: si elegimos $\varepsilon := x$, tenemos que $|1/n - 0| = 1/n > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Los cuerpos $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y $\mathbb{Q}(x)$ son dos instancias particulares del concepto general de un cuerpo ordenado.

Definición 9.A.5 (Cuerpo Ordenado)**.** *Un* **cuerpo ordenado** *es un cuerpo R, junto con una* **relación de orden total** *que resulta compatible con la estructura de cuerpo de R.*

Un cuerpo ordenado es el tipo de dominio natural en el cual las tres hipótesis de completitud tienen sentido, y en el cual, si éstas se satisfacen, las demostraciones de los Teoremas de Bolzano (Teorema 8.1.2), Weierstrass (Teorema 8.2.10) y Punto Fijo (Teorema 8.3.9) continúan siendo vá-

lidas, como puede constatarse a partir de las demostraciones correspondientes. Nuestra intención, como hemos mencionado anteriormente, es “completar” $\mathbb{Q}$ a un cuerpo ordenado R en el cual no aparezcan las “anomalías” que ocurren en $\mathbb{Q}$, es decir, en el cual las tres hipótesis de completitud resulten válidas.

Sucesiones en cuerpos ordenados

Sea R un cuerpo ordenado. Tenemos entonces una noción bien definida de positividad, a partir de la cual obtenemos una noción de valor absoluto y de distancia en R. Más precisamente, definimos el **valor absoluto** $|\alpha|$ de un elemento α de R como

$$|\alpha| := \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \geq 0, \\ -\alpha & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

A su vez, definimos la **distancia** $d(\alpha,\beta)$ entre dos elementos α,β de R como el valor absoluto de su diferencia, es decir, $d(\alpha,\beta) := |\alpha-\beta|$. Estas nociones satisfacen las mismas propiedades que el valor absoluto y la distancia de $\mathbb{R}$ (Ejercicios 6.0.2 y 6.0.3).

Asimismo, definimos los conceptos de sucesión de Cauchy de R y sucesión convergente de R de la misma manera que hemos definido los correspondientes conceptos para sucesiones de $\mathbb{R}$ (ver la Sección 9.1). Como hemos comentado a propósito de sucesiones de $\mathbb{R}$, todos los resultados “generales” de sucesiones de $\mathbb{Q}$ son válidos también para sucesiones de R, con demostraciones similares a las de $\mathbb{Q}$ (ver la Sección 9.1 por un breve “catálogo” de propiedades de este tipo). Así, en lo que sigue vamos a utilizar estas propiedades sin demostración.

9.A.2. Algunos resultados técnicos sobre cuerpos ordenados

Cabría preguntarse por qué determinados enunciados valen suponiendo una u otra de las tres hipótesis de completitud. De hecho, lo que ocurre es que no hay realmente una razón determinada: hemos asumido una u otra de las hipótesis **simplemente por comodidad**, dado que **las tres hipótesis de completitud son equivalentes** en cualquier cuerpo ordenado R. A fin de probar este resultado vamos a necesitar ciertos preliminares sobre cuerpos ordenados, que desarrollamos a continuación.

Morfismos de cuerpos ordenados

Si bien arribamos al concepto de cuerpo ordenado partiendo de la idea de extender $\mathbb{Q}$, “completándolo” con los elementos que “le faltan” desde el punto de vista del análisis, no es evidente que todo cuerpo ordenado sea necesariamente del tipo de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ o $\mathbb{Q}(x)$, es decir, una extensión de $\mathbb{Q}$. Sin embargo, esto es así: todo cuerpo ordenado extiende necesariamente a $\mathbb{Q}$ (con la terminología de la teoría de cuerpos, es de característica 0).

Para esto, es necesario reflexionar acerca de qué significa que un cuerpo ordenado R extienda a $\mathbb{Q}$. En principio, formalmente $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ no extiende a $\mathbb{Q}$, dado que cada elemento de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es **una expresión de la forma** $a+b\sqrt{2}$ con $a,b \in \mathbb{Q}$. Sin embargo, podemos representar cada $a \in \mathbb{Q}$ por el elemento $a+0\sqrt{2}$. Así, las operaciones aritméticas y el orden en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ de dos elementos de la

forma $a+0\sqrt{2}$ y $b+0\sqrt{2}$ se corresponden de manera natural con las correspondientes operaciones y el orden de a y b en $\mathbb{Q}$, con lo que podemos considerar que $\mathbb{Q}$ está contenido en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

El concepto que nos permite expresar esta situación, esto es, que $\mathbb{Q}$ se **identifica** con un subconjunto de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ de manera compatible con las operaciones y el orden de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, es el de morfismo de cuerpos ordenados, que consideramos a continuación.

Definición 9.A.6 (Morfismo de cuerpos ordenados)**.** *Sean R_1 y R_2 dos cuerpos ordenados. Sean $+_1$, $\cdot_1$, $\leq_1$ y 1_1 la suma, el producto, el orden y el elemento neutro para el producto de R_1, en tanto que $+_2$, $\cdot_2$, $\leq_2$ y 1_2 representan la suma, el producto, el orden y el elemento neutro para el producto de R_2. Una función $f : R_1 \to R_2$ entre dos cuerpos ordenados R_1 y R_2 se dice un* **morfismo de cuerpos ordenados** *si, para cada $\alpha, \beta \in R_1$, tenemos que*

1. $f(\alpha +_1 \beta) = f(\alpha) +_2 f(\beta)$,
2. $f(\alpha \cdot_1 \beta) = f(\alpha) \cdot_2 f(\beta)$,
3. $\alpha \leq_1 \beta$ *implica* $f(\alpha) \leq_2 f(\beta)$,
4. $f(1_1) = 1_2$.

Es un hecho general de la teoría de cuerpos que todo morfismo $f : R_1 \to R_2$ de cuerpos es **inyectivo**, con lo cual se establece de hecho una **identificación** de los elementos de R_1 con un subconjunto de R_2, la imagen de f. De acuerdo con la definición de morfismo de cuerpos ordenados (Definición 9.A.6), esta identificación resulta **compatible** con las operaciones aritméticas y el orden de R_1 y R_2. En tal sentido, diremos que un cuerpo ordenado R_2 **extiende** un cuerpo ordenado R_1 **si existe un morfismo de cuerpos ordenados** $f : R_1 \to R_2$. Con esta terminología, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 9.A.7. *Sea R un cuerpo ordenado. Entonces R extiende a $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Tenemos que definir un morfismo de cuerpos ordenados $f : \mathbb{Q} \to R$. Para esto, a fin de que se satisfaga la condición 4 de la definición de morfismo de cuerpos ordenados, definimos

$$f(1) := 1_R.$$

A fin de definir $f(0)$, observamos que, si f es un morfismo de cuerpos, entonces $f(0) = f(0+0) = f(0) +_R f(0)$, de donde concluimos que la única posible definición de $f(0)$ la siguiente:

$$f(0) := 0_R.$$

Para definir $f(-1)$, observamos que debe ser $0_R = f(1-1) = f(1) +_R f(-1)$, de lo cual concluimos que la única posible definición para $f(-1)$ es:

$$f(-1) := -1_R.$$

Estas definiciones tienen una única extensión posible a todos los enteros:

$$f(n) = f(\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ veces}}) := \underbrace{1_R +_R \cdots +_R 1_R}_{n \text{ veces}} \text{ para cada } n > 0,$$

$$f(-n) = f(\underbrace{-1 - \cdots - 1}_{n \text{ veces}}) := \underbrace{-1_R -_R \cdots -_R 1_R}_{n \text{ veces}} \text{ para cada } n > 0.$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, el elemento $f(n)$ será notado n_R. De la asociatividad de la suma se concluye fácilmente que $f(n+m) = f(n) +_R f(m)$ y $f(n \cdot m) = f(n) \cdot_R f(m)$ para cada $n, m \in \mathbb{Z}$. A su vez, como R es un cuerpo ordenado, tenemos que $n_R > m_R$ si $n > m$, dado que $1_R >_R 0_R$ y n_R se obtiene sumando a m_R el elemento 1_R una cantidad positiva de veces. En particular, $n_R \neq 0_R$ si $n \neq 0$, y por lo tanto, si $m \neq 0$, entonces la expresión

$$f(n/m) = n_R/m_R := n_R {m_R}^{1}$$

define correctamente la imagen por f de la **fracción** n/m. Si $n/m = r/s$, entonces $ns = mr$, y por lo tanto $n_R \cdot_R s_R = m_R \cdot_R r_R$, de lo que concluimos que nuestra definición de f se extiende correctamente a $\mathbb{Q}$.

Con estas definiciones, vemos que $f(n/m + r/s) = f(n/m) +_R f(r/s)$ y $f(n/m \cdot r/s) = f(n/m) \cdot_R f(r/s)$ para cada par de racionales n/m y r/s, y también $f(n/m) \leq_R f(r/s)$ si $n/m \leq r/s$, lo que concluye la demostración. □

Si bien los argumentos de esta demostración parecen a primera vista ser aplicables a cualquier cuerpo R, esto no es así, ya que existen cuerpos R en los cuales una expresión del tipo $1_R +_R \cdots +_R 1_R$ puede ser igual a 0_R, y por lo tanto, en tales casos no es posible extender la definición $f(n) := n_R$ para $n \in \mathbb{Z}$ a racionales. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\underbrace{1_R +_R \cdots +_R 1_R}_{n \text{ veces}} = 0_R, \tag{9.13}$$

el mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que vale (9.13) se denomina la **característica** de R. Por otro lado, si (9.13) no se satisface para ningún $n \in \mathbb{N}$, se dice que R es de **característica 0**, y en tal caso la demostración del Teorema 9.A.7 se aplica *mutatis mutandis*. En estos términos, podemos parafrasear el Teorema 9.A.7 diciendo que **todo cuerpo ordenado es de característica** 0.

Cuerpos ordenados arquimedianos

A fin de evitar "patologías" del tipo de la del cuerpo $\mathbb{Q}(x)$ (Ejemplos 9.A.2 y 9.A.4), en los cuerpos ordenados que consideremos vamos a requerir una propiedad que garantiza que no hay "elementos infinitesimales": la arquimedianidad.

Definición 9.A.8 (Arquimedianidad)**.** *Un cuerpo ordenado R se dice* **arquimediano** *si para cada par de elementos positivos $\alpha, \beta \in R$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\alpha > \beta$.*

En otras palabras, ningún elemento positivo $\alpha \in R$ es tan chico como para que no pueda, sumado una cantidad adecuada de veces, superar cualquier otro elemento $\beta \in R$. Una primer consecuencia de la definición de arquimedianidad es que "recuperamos" la propiedad de arquimedianidad de $\mathbb{Q}$ (Lema 3.1.2), que habíamos "perdido" al pasar al concepto de cuerpo ordenado en toda su generalidad.

Lema 9.A.9. *Sea R un cuerpo ordenado arquimediano y sea $\alpha > 0$ un elemento de R. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \alpha$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la definición de arquimedianidad en el caso $\beta = 1$. □

En particular, de este resultado se deduce, como vamos a ver, que en un cuerpo ordenado arquimediano la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Esto tiene particular importancia desde el punto de vista del análisis, dado que, por ejemplo, tanto la demostración del Teorema de Bolzano (Teorema 8.1.2) como la del Teorema de Weierstrass (Teorema 8.2.10) y la del Teorema de Punto Fijo (Teorema 8.3.9) usan implícitamente esta propiedad. Más aún, la **arquimedianidad es equivalente a la convergencia de la sucesión** $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$, como demostramos en la siguiente proposición.

Proposición 9.A.10. *Sea R un cuerpo ordenado. Entonces R es arquimediano si y solo si la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que R es arquimediano y sea $\varepsilon > 0$. El Lema 9.A.9 asegura que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Por lo tanto, si $n \geq n_0$, tenemos que

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

de donde concluimos que $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

Supongamos ahora que la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 y sean α, β elementos positivos de R. Entonces $\varepsilon := \alpha/\beta > 0$, y por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha/\beta > 1/n$ para todo $n \geq n_0$. En particular, $\alpha/\beta > 1/n_0$, de donde se deduce que $n_0\alpha > \beta$. Esto demuestra que R es arquimediano. □

Ejemplo 9.A.11. *El cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es arquimediano. En efecto, sea $\alpha := a + b\sqrt{2}$ un elemento positivo de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Dado que $a, b \in \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$ es arquimediano (Lema 3.1.2), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > |a| + 2|b|$. En consecuencia,*

$$n > |a| + 2|b| \geq |a| + \sqrt{2}|b| \geq a + \sqrt{2}b = \alpha.$$

En consecuencia, si α, β son elementos positivos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, lo que hemos demostrado asegura que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \beta/\alpha$, o equivalentemente, $n\alpha > \beta$. Esto demuestra nuestra afirmación.

Ejercicio 9.A.12. *Demostrar que $\mathbb{Q}(x)$, con el orden que hemos definido en el Ejemplo 9.A.4, no es arquimediano.*

Otra consecuencia importante de la arquimedianidad es el siguiente resultado, que muestra que $\mathbb{Q}$ **es denso en cualquier cuerpo ordenado arquimediano**.

Proposición 9.A.13 (Densidad de $\mathbb{Q}$). *Sea R un cuerpo ordenado arquimediano y sean $\alpha > \beta$ dos elementos arbitrarios de R. Entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha > q > \beta$.*

Demostración. Demostramos en primer lugar el enunciado en el caso en que $\alpha > 0$ y $\alpha - \beta > 1$. Sea $S := \{n \in \mathbb{N} : n \geq \alpha\}$. De la arquimedianidad de R concluimos que S no es vacío (dado que

existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot 1 > \alpha$). Por lo tanto, el principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$ (Teorema 0.2.3) asegura que S tiene un elemento mínimo n_0.

De la definición de n_0 tenemos que $n_0 \geq \alpha > n_0 - 1$, y por ende, que $n_0 - 1 > \beta$, ya que, si fuera cierto que $n_0 - 1 \leq \beta$, entonces tendríamos que $n_0 \leq 1 + \beta < \alpha$, lo que contradiría el hecho de que $n_0 \in S$. En conclusión, resulta $\beta < n_0 - 1 < \alpha$, de modo que $n_0 - 1 \in \mathbb{Q}$ es el racional que estamos buscando.

Supongamos ahora que $\alpha - \beta > 0$ es arbitrario. Por la arquimedianidad de R sabemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m(\alpha - \beta) = m\alpha - m\beta > 1$. Por lo tanto, dado que $m\alpha - m\beta > 1$ y $m\alpha > 0$, lo que hemos demostrado nos asegura que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $m\alpha > q > m\beta$, es decir, $\alpha > q/m > \beta$.

Supongamos finalmente que $\alpha \leq 0$. Entonces la arquimedianidad de R asegura que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > -\alpha$, es decir, $\alpha + m > 0$. Por lo tanto, del caso $\alpha - \beta > 0$ arbitrario con $\alpha > 0$, deducimos que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha + m > q > \beta + m$. En consecuencia, $q - m$ es el racional que estamos buscando. □

Ejercicio 9.A.14. *Con las hipótesis del resultado de densidad de $\mathbb{Q}$ precedente, demostrar que el elemento $q \in \mathbb{Q}$ de la Proposición 9.A.13 puede elegirse de la forma $m/10^n$.*

Desarrollos decimales en cuerpos ordenados arquimedianos

Concluimos los preliminares sobre cuerpos ordenados arquimedianos estableciendo la existencia y unicidad de los desarrollos decimales. En primer lugar, vamos a ver que cada elemento α de un cuerpo ordenado arquimediano R posee **desarrollos decimales finitos** de cualquier orden, que aproximan bien a dicho elemento α. Así, vamos a concluir que cada elemento de R se representa por un único **desarrollo decimal infinito "admisible"**, lo que constituye una información fundamental sobre la estructura de R.

Teorema 9.A.15 (Existencia y unicidad de los desarrollos decimales finitos)**.** *Sea R un cuerpo ordenado arquimediano y sea α un elemento positivo de R. Entonces, para cada $n \geq 0$ existen únicos enteros positivos r_0 y $r_1, \ldots, r_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ tales que:*

$$0 \leq \alpha - \left(r_0 + \frac{r_1}{10} + \cdots + \frac{r_n}{10^n} \right) < \frac{1}{10^n}. \tag{9.14}$$

La demostración del Teorema procede en forma similar a la de la existencia y unicidad de los desarrollos decimales en $\mathbb{Q}$ (Teorema 4.2.2), comenzando por establecer, en primer lugar, la existencia de la **parte entera**.

Lema 9.A.16. *Sea R un cuerpo ordenado arquimediano, y α un elemento positivo arbitrario de R. Entonces, existe un único entero $\lfloor \alpha \rfloor \geq 0$ con la siguiente propiedad:*

$$\lfloor \alpha \rfloor \leq \alpha < \lfloor \alpha \rfloor + 1.$$

Demostración. En la demostración de la existencia de la parte entera en $\mathbb{Q}$ (Lema 4.2.1) utilizamos de manera esencial el hecho de que cada número racional positivo se representa por un cociente de dos números naturales, lo que nos permitió deducir el resultado del Teorema de la división

en $\mathbb{Z}$ (Teorema 0.2.5). Desafortunadamente, si R es un cuerpo ordenado arquimediano arbitrario, necesitamos un argumento de carácter más general.

Para esto, consideramos el conjunto $S := \{n \in \mathbb{N} : n > \alpha\}$. Dado que se trata de un subconjunto de los naturales, el principio de buena ordenación (Teorema 0.2.3) demuestra que existe el mínimo de S, digamos n_0.

Sea $\lfloor \alpha \rfloor := n_0 - 1$. Afirmamos que $\lfloor \alpha \rfloor$ satisface las condiciones del enunciado. En primer lugar, dado que $n_0 = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ pertenece a S, concluimos que $\lfloor \alpha \rfloor + 1 > \alpha$. Por otro lado, la minimalidad de n_0 implica que $\lfloor \alpha \rfloor = n_0 - 1$ no pertenece a S, y por ende $\lfloor \alpha \rfloor \leq \alpha$. En consecuencia, tenemos

$$\lfloor \alpha \rfloor \leq \alpha < \lfloor \alpha \rfloor + 1.$$

Por otro lado, en lo que respecta a la unicidad, cabe observar que si $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ satisface las condiciones $s \leq \alpha < s+1$, entonces $s+1 \in S$, y por lo tanto $n_0 \leq s+1$. Si $n_0 < s+1$, entonces $\alpha < n_0 \leq s \leq \alpha$. Por lo tanto, $s = n_0 - 1 = \lfloor \alpha \rfloor$, lo que demuestra la unicidad de $\lfloor \alpha \rfloor$. □

Con este resultado podemos establecer la existencia y unicidad de los desarrollos decimales finitos. Dado que ésta es idéntica a la de la existencia y unicidad de los desarrollos decimales finitos en $\mathbb{Q}$ (Teorema 4.2.2), solo mencionamos brevemente los pasos fundamentales de la misma.

Idea de la demostración del Teorema 9.A.15. Si definimos $r_0 := \lfloor \alpha \rfloor$, el caso $n = 0$ del enunciado es una consecuencia inmediata de la existencia y unicidad de la parte entera (Lema 9.A.16).

Luego, suponiendo inductivamente que tenemos demostrada la existencia y unicidad del desarrollo decimal de n dígitos de α para cierto entero $n \geq 0$, es decir, que existen únicos $r_0 \geq 0$ y $r_1, \dots, r_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ tales que

$$0 \leq \alpha - \left(r_0 + \frac{r_1}{10} + \cdots + \frac{r_n}{10^n} \right) < \frac{1}{10^n},$$

obtenemos el $(n+1)$–ésimo dígito decimal r_{n+1} de α en la forma $r_{n+1} := \lfloor \alpha_0 \rfloor$, siendo $\alpha_0 := 10^{n+1}\big(\alpha - (r_0 + r_1/10 + \cdots + r_n/10^n)\big)$. □

De (9.14) deducimos que, cuando n tiende a infinito, la sucesión de aproximaciones decimales finitas $(r_0 + r_1/10 + \cdots + r_n/10^n)_{n>0}$ converge a α, lo que escribimos en la forma $\alpha = r_0.r_1r_2\dots$. Así, del mismo modo que en $\mathbb{Q}$, **cada elemento $\alpha > 0$ de un cuerpo ordenado arquimediano R se expresa de única forma como un desarrollo decimal infinito** $\alpha = r_0.r_1r_2\dots$ que satisface las condiciones del Teorema 9.A.15. Por otro lado, si $\alpha \in R$ es negativo, entonces α se representa por el desarrollo decimal infinito $-r_0.r_1r_2\dots$, donde $r_0.r_1r_2\dots$ es el desarrollo decimal infinito de $-\alpha$. En conclusión, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 9.A.17 (Existencia y unicidad de los desarrollos decimales infinitos)**.** *Sea R un cuerpo ordenado arquimediano. Entonces cada $\alpha \in R$ admite un único desarrollo decimal infinito $\alpha = \pm r_0.r_1r_2\dots$ que satisface las condiciones del Teorema 9.A.15.*

Como antes, a los desarrollos decimales que satisfacen las condiciones del Teorema 9.A.15 vamos a denominarlos **desarrollos decimales admisibles**.

Retomando la discusión acerca de la "completación" de $\mathbb{Q}$, vemos que sería conveniente completar $\mathbb{Q}$ a un cuerpo ordenado **arquimediano**. A su vez, si R es el resultado de dicha completación, quisiéramos que las tres hipótesis de completitud se satisfagan en R. En tal sentido, cabe preguntarse con **qué** debemos completar a $\mathbb{Q}$. En el conjunto de todos los desarrollos decimales infinitos admisibles aparecen, de manera embrionaria, las tres hipótesis de completitud: cada desarrollo decimal infinito es el "límite" de una sucesión de desarrollos decimales finitos (donde ponemos entre comillas la palabra "límite", ya que en esta instancia nos estamos refiriendo a la idea intuitiva de límite), que resulta de por sí una sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ que es a su vez monótona y acotada. Por otro lado, a fin de hallar el desarrollo decimal de $n+1$ dígitos de un elemento α de R, procedemos "refinando" el intervalo $I_n := [r_0.r_1r_2\dots r_n, r_0.r_1r_2\dots(r_n+1)]$ de longitud $1/10^n$ que contiene a α, y por lo tanto, construimos de hecho una sucesión de intervalos cerrados, acotados y encajados $(I_n)_{n>0}$ cuya longitud tiende a cero tal que $\bigcap_{n>0} I_n = \{\alpha\}$.

Como hemos visto en el Capítulo 4, **toda** sucesión de Cauchy de $\mathbb{Q}$ (y también toda sucesión monótona y acotada de $\mathbb{Q}$; y toda sucesión de intervalos cerrados, acotados y encajados de $\mathbb{Q}$ cuya longitud tiende a 0) determina un **único desarrollo decimal infinito admisible**. En tal sentido, es natural pensar que este desarrollo decimal infinito debería ser el **límite** de la sucesión de Cauchy en consideración. Por lo tanto, a fin de tener los límites de todas las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{Q}$ (y de todas las sucesiones monótonas y acotadas de $\mathbb{Q}$, y la intersección de todas las sucesiones de intervalos cerrados, acotados y encajados de $\mathbb{Q}$ cuya longitud tiende a 0), vamos a **agregar a $\mathbb{Q}$ todos los desarrollos decimales infinitos** del tipo de los del Teorema 9.A.15.

9.A.3. La equivalencia de las tres hipótesis de completitud

Antes de proceder a la "completación" de $\mathbb{Q}$ vamos a analizar la cuestión de la completitud más de cerca. Como hemos dicho, nuestro objetivo es obtener un cuerpo ordenado arquimediano en el cual se satisfagan las tres hipótesis de completitud. Ahora bien, como demostramos en el siguiente teorema, las tres hipótesis son equivalentes sobre cualquier cuerpo ordenado arquimediano, por lo que bastará con "completar" $\mathbb{Q}$ de manera que una de ellas resulte válida.

Teorema 9.A.18 (Teorema de completitud)**.** *Sea R un cuerpo ordenado arquimediano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes*[1]*:*

1. *toda sucesión monótona y acotada de R converge,*

2. *toda sucesión de Cauchy de R converge,*

[1] Cabe destacar que, en un cuerpo ordenado arbitrario, la condición 1. implica la arquimedianidad, en tanto que las condiciones 2. y 3. no la implican. Por lo tanto, para cuerpos ordenados tenemos la siguiente generalización del Teorema de completitud.

Teorema. *Sea R un cuerpo ordenado. Son equivalentes:*

- *la condición 1,*
- *la condición 2 y la arquimedianidad de R,*
- *la condición 3 y la arquimedianidad de R.*

De todas maneras, dado que nuestra intención es discutir el caso arquimediano, vamos a considerar el enunciado más simple del Teorema 9.A.18. Para una demostración de esta versión más general del Teorema de completitud puede verse [EHH$^+$91, Chapter 2].

3. *toda sucesión de intervalos cerrados, acotados y encajados de R cuya longitud tiende a 0 tiene intersección no vacía.*

A efectos de la demostración de este resultado necesitamos el siguiente criterio de convergencia de las sucesiones de Cauchy.

Lema 9.A.19. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de R que posee una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $\alpha \in R$. Entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a α, tenemos que existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad y \quad |a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$$

si $n, m \geq N_1$ y $k \geq N_2$ respectivamente. Sea $N := \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y $n \geq N$. Entonces

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{n_N}| + |a_{n_N} - \alpha|.$$

Dado que $n_N \geq n_{N_1} \geq N_1$ y $n \geq N \geq N_1$, concluimos que $|a_n - a_{n_N}| < \varepsilon$. Por otro lado, dado que $N \geq N_2$, vemos que $|a_{n_N} - \alpha| < \varepsilon$. En definitiva, $|a_n - \alpha| < 2\varepsilon$, lo que concluye la demostración. □

Tenemos todas las herramientas para demostrar el Teorema de completitud.

Demostración del Teorema de completitud.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de R. Argumentando de la misma manera que en el Lema 8.2.4 vemos que existe una subsucesión monótona $(a_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dado que, por hipótesis, cada sucesión monótona y acotada de R converge en R, concluimos en particular que $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge en R. En consecuencia, el criterio de convergencia de las sucesiones de Cauchy precedente (Lema 9.A.19) asegura que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en R.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} := ([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos cerrados, acotados y encajados tales que $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Afirmamos que las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$. Si $n \geq n_0$ y $k \geq 0$, entonces a_n, b_n, a_{n+k} y b_{n+k} pertenecen a I_{n_0}, y por lo tanto $|a_{n+k} - a_n| \leq |b_{n_0} - a_{n_0}| < \varepsilon$ y $|b_{n+k} - b_n| \leq |b_{n_0} - a_{n_0}| < \varepsilon$. Esto demuestra que las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son de Cauchy, de lo cual, por hipótesis, concluimos que convergen a $\alpha, \beta \in R$ respectivamente.

Como $a_n \leq b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es fácil ver que $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $0 \leq \beta - \alpha \leq b_n - a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde, por la propiedad sandwich (Lema 3.1.35), deducimos que $\beta - \alpha = 0$, es decir, $\alpha = \beta$. Dado que $a_n \leq \alpha \leq b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\alpha \in I_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\alpha \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona y acotada de R. Supongamos sin pérdida de generalidad que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada (el caso en que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente se demuestra en forma similar). Entonces existen $A_0 \in R$ que no es cota superior de $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ (la imagen de la sucesión) y $B_0 \in R$ que sí lo es. Argumentando como en la demostración de que toda sucesión de $\mathbb{R}$ monótona y acotada es de Cauchy (Teorema 6.3.7), concluimos que existe una sucesión de

intervalos encajados $(I_n)_{n>0} := ([A_n, B_n])_{n>0}$ cuya longitud tiende a 0, tales que B_n es cota superior y A_n no es cota superior de $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ para cada $n \geq 0$. Por hipótesis, existe $\alpha \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Más aún, dado que $\lim_{n\to\infty}(B_n - A_n) = 0$, es fácil ver que $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}$.

Afirmamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq B_{n_0} - A_{n_0} < \varepsilon$, ya que $(B_n - A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Además, existe $a_{n_1} > A_{n_0}$, ya que A_{n_0} no es cota superior de $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$. Por lo tanto, de la monotonía de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deducimos que $a_n > A_{n_0}$ para cada $n \geq n_1$. Por otro lado, sabemos que B_{n_0} es cota superior de $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$, y por ende, $B_{n_0} \geq a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, concluimos que $A_{n_0} \leq a_n \leq B_{n_0}$ para cada $n \geq n_1$. Teniendo en cuenta que $A_{n_0} \leq \alpha \leq B_{n_0}$, ya que $\alpha \in I_{n_0}$, concluimos finalmente que $|a_n - \alpha| \leq B_{n_0} - A_{n_0} < \varepsilon$ para cada $n \geq n_1$. Esto prueba la afirmación y demuestra que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. □

Un cuerpo ordenado arquimediano en el cual se satisface alguna de las condiciones 1, 2, 3 (y por lo tanto, todas ellas), se dirá **completo**. En particular, como hemos dicho, en un cuerpo arquimediano completo la conclusión de los Teoremas de Bolzano (Teorema 8.1.2), Weierstrass (Teorema 8.2.10) y de Punto Fijo (Teorema 8.3.9) resulta cierta.

9.A.4. Cuerpos ordenados arquimedianos completos

Hemos demostrado una serie de resultados válidos sobre un cuerpo ordenado arquimediano R arbitrario. En particular, demostramos que cada elemento x de R se representa de forma **única** mediante un desarrollo decimal infinito "admisible", esto es, uno que satisface las condiciones del resultado de existencia de los desarrollos decimales finitos (Teorema 9.A.15). Por lo tanto, cada cuerpo ordenado arquimediano se puede ver como **un subconjunto del conjunto de los desarrollos decimales infinitos admisibles**.

Asimismo, si el cuerpo ordenado arquimediano en consideración resulta **completo**, tenemos el siguiente resultado.

Lema 9.A.20. *Sea R un cuerpo ordenado arquimediano completo. Entonces, cada desarrollo decimal infinito admisible representa un único elemento de R.*

Demostración. Sea $\pm r_0.r_1r_2\ldots$ un desarrollo decimal infinito. Dado que la sucesión de desarrollos decimales finitos $(\pm r_0.r_1\ldots r_n)_{n>0}$ posee la "propiedad del decrecimiento exponencial", deducimos que es de Cauchy (Lema 3.3.8). En consecuencia, la completitud de R asegura que $(\pm r_0.r_1\ldots r_n)_{n>0}$ converge a un elemento α de R, que debe necesariamente ser único por la unicidad del límite de una sucesión (Lema 3.1.25). □

Del Lema 9.A.20 y el resultado sobre la existencia y unicidad de los desarrollos decimales infinitos admisibles (Corolario 9.A.17) concluimos que, si R es un cuerpo ordenado arquimediano completo, cada elemento α de R se representa por un único desarrollo decimal infinito admisible. Recíprocamente, cada desarrollo decimal infinito admisible representa un elemento de α. Por lo tanto, vemos que existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de R y el conjunto de los desarrollos decimales infinitos admisibles de R. Es decir, como conjunto, **cada cuerpo ordenado arquimediano completo es el conjunto de los desarrollos decimales infinitos admisibles**.

En particular, vemos entonces que cada cuerpo ordenado arquimediano completo resulta, en algún sentido, muy "parecido" a $\mathbb{R}$, que hemos definido precisamente como el conjunto de todos los desarrollos decimales infinitos admisibles, con las operaciones aritméticas y el orden de las Definiciones 5.2.2 y 5.3.4 respectivamente. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado, que es el objetivo central del presente apéndice.

Teorema 9.A.21 (Unicidad del cuerpo ordenado completo). *Sea R un cuerpo ordenado completo arquimediano. Entonces R es isomorfo a $\mathbb{R}$.*

Demostración. Representamos por $+_R$, $\cdot_R$ y $\leq_R$ a la suma, el producto y el orden de R, en tanto que escribimos $+$, $\cdot$ y $\leq$ para referirnos a la suma, el producto y orden de $\mathbb{R}$. Nuestro objetivo es definir un isomorfismo de cuerpos ordenados $f : R \to \mathbb{R}$.

Dado que R es un cuerpo ordenado arquimediano completo, tenemos que cada elemento de R posee un único desarrollo decimal infinito admisible (Corolario 9.A.17). Ahora bien, cada desarrollo decimal infinito admisible es precisamente un número real, de modo que, identificando cada elemento de R con su correspondiente desarrollo decimal admisible, estamos definiendo una función de R en $\mathbb{R}$. Ésta es nuestra definición del morfismo f: si $\alpha \in R$ posee el desarrollo decimal admisible $\pm r_0.r_1r_2\dots$, definimos

$$f(\alpha) := \pm r_0.r_1r_2\dots \tag{9.15}$$

A fin de ver que la función f así definida resulta un morfismo de cuerpos ordenados, tenemos que ver que $f(0_R) = 0_{\mathbb{R}}$, $f(1_R) = 1_{\mathbb{R}}$ y, para cada par de elementos α, β de R,

$$f(\alpha +_R \beta) = f(\alpha) + f(\beta), \quad f(\alpha \cdot_R \beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta), \tag{9.16}$$

$$f(\alpha) \leq f(\beta) \quad \text{si } \alpha \leq_R \beta. \tag{9.17}$$

Que las identidades $f(0_R) = 0_{\mathbb{R}}$ y $f(1_R) = 1_{\mathbb{R}}$ resultan ciertas es consecuencia de que 0_R y 1_R tienen los desarrollos decimales admisibles $0{,}000\dots$ y $1{,}000\dots$, que son justamente los que hemos definido como el elemento neutro para la suma y el producto en $\mathbb{R}$ respectivamente.

Sean α y β dos elementos de R que se representan por los desarrollos decimales infinitos admisibles $\pm r_0.r_1r_2\dots$ y $\pm s_0.s_1s_2\dots$ respectivamente. Esto significa que

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \pm r_0.r_1\dots r_n \quad \text{y} \quad \beta = \lim_{n \to \infty} \pm s_0.s_1\dots s_n.$$

En consecuencia, por las propiedades aritméticas de los límites (Teorema 3.1.27), que hemos demostrado en $\mathbb{Q}$ pero siguen resultando válidas en un cuerpo ordenado arbitrario, vemos que

$$\alpha +_R \beta = \lim_{n \to \infty} (\pm r_0.r_1\dots r_n + \pm s_0.s_1\dots s_n) \text{ y } \alpha \cdot_R \beta = \lim_{n \to \infty} (\pm r_0.r_1\dots r_n \cdot \pm s_0.s_1\dots s_n).$$

A su vez, los desarrollos decimales admisibles que determinan las sucesiones $(\pm r_0.r_1\dots r_n + \pm s_0.s_1\dots s_n)_{n>0}$ y $(\pm r_0.r_1\dots r_n \cdot \pm s_0.s_1\dots s_n)_{n>0}$ son precisamente lo que hemos definido como la suma y el producto de $\pm r_0.r_1r_2\dots$ y $\pm s_0.s_1s_2\dots$, con lo cual concluimos que se satisface (9.16).

Resta ver que $f(\alpha) \leq f(\beta)$ si $\alpha \leq_R \beta$. Dado que en el caso $\alpha = \beta$ la desigualdad $f(\alpha) \leq f(\beta)$ es evidentemente cierta, supongamos que $\alpha <_R \beta$. Entonces tenemos que, acuerdo con el resultado

sobre la densidad de $\mathbb{Q}$ en R (Proposición 9.A.13 y Ejercicio 9.A.14), existen $N \geq 0$ y $M \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\alpha <_R \frac{M}{10^N} <_R \beta.$$

En consecuencia, si $n \geq N$ es lo suficientemente grande de modo que

$$\alpha +_R \frac{1}{10^n} <_R \frac{M}{10^N} <_R \beta -_R \frac{1}{10^n},$$

teniendo en cuenta que $|\pm r_0.r_1 \ldots r_n - \alpha| < 10^{\ n}$ y $|\pm s_0.s_1 \ldots s_n - \beta| < 10^{\ n}$, resulta

$$\pm r_0.r_1 \ldots r_n < \frac{M}{10^N} < \pm s_0.s_1 \ldots s_n. \tag{9.18}$$

En particular, si $n_0 \geq 0$ es el mínimo índice tal que $\pm r_{n_0} \neq \pm s_{n_0}$, entonces $\pm r_{n_0} < \pm s_{n_0}$, dado que si fuera $\pm r_{n_0} \geq \pm s_{n_0}$ tendríamos que $\pm r_0.r_1 \ldots r_n \geq \pm s_0.s_1 \ldots s_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, contradiciendo (9.18). Por lo tanto, nuestro criterio de ordenamiento de los números reales (Lema 5.3.8) asegura que $\pm r_0.r_1 r_2 \ldots < \pm s_0.s_1 s_2 \ldots$, es decir, que se satisface (9.17).

Por último, resta ver que f es una función biyectiva, para lo cual es necesario probar que f resulta suryectiva, ya que, como hemos dicho, un morfismo de cuerpos es necesariamente inyectivo. Dado un desarrollo decimal admisible $\pm r_0.r_1 r_2 \ldots$, de acuerdo con el Lema 9.A.20 tenemos que la sucesión $(\pm r_0.r_1 \ldots r_n)_{n>0}$, considerada como sucesión de R, converge a $\alpha \in R$. En particular, α se representa por el desarrollo decimal $\pm r_0.r_1 r_2 \ldots$ por lo que, de acuerdo con nuestra definición (9.15) de f, resulta $f(\alpha) = \pm r_0.r_1 r_2 \ldots$. Esto concluye la demostración de la suryectividad de f. □

De acuerdo con el resultado precedente, todos los procesos de completación de $\mathbb{Q}$ conducen a cuerpos ordenados completos isomorfos. Aquí hemos elegido completar a $\mathbb{Q}$ agregando los desarrollos decimales admisibles “irracionales”, en tanto que en la literatura este proceso de completación de $\mathbb{Q}$ ha sido realizado por medio de diversas construcciones. Una construcción clásica, debida originalmente a R. Dedekind (su trabajo al respecto ha sido editado en [Ded98]), se realiza por medio de “cortaduras”, esto es, cada número real se representa por medio del conjunto de todos los números racionales menores que él (que puede verse, por ejemplo, en [Spi92, Capítulo 28]).

10. Continuidad de funciones reales revisitada

Hemos introducido la noción de continuidad diciendo que una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\alpha \in A$ si f tiene un comportamiento "definido" en torno a α. Hemos descripto este comportamiento en términos de sucesiones: para cada sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A que converge a α, la sucesión $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\alpha)$. Así, la diferencia $|f(a_n) - f(\alpha)|$ es "chica" cada vez que la diferencia $|a_n - \alpha|$ lo es. Ahora bien, ¿cuánto depende esta relación entre $|f(a_n) - f(\alpha)|$ y $|a_n - \alpha|$ de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en consideración? Sería deseable que tal relación **no dependa demasiado fuertemente** de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dado que, de otro modo, sería difícil aproximar un valor $f(\alpha)$ por medio de la imagen $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a α: no sabríamos si la diferencia $|a_n - \alpha|$ es "suficiemente chica", dado que la diferencia $|f(a_n) - f(\alpha)|$ podría variar arbitrariamente con la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en consideración.

A fin de analizar esta cuestión, podemos retomar el problema de minimización (2.6) de la Sección 2.3: se trata de determinar el mínimo de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^3 - 6x$. Observamos que la función derivada $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de g está dada por $g'(x) = 3(x^2 - 2)$, que es positiva en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ y negativa en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. En consecuencia, g es decreciente en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y creciente en $(\sqrt{2}, +\infty)$, de lo que concluimos que alcanza un mínimo local en $x = \sqrt{2}$. El valor de dicho mínimo es $g(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$.

Dado que tanto la sucesión de puntos medios $(c_n)_{n>0}$ del método de bisección de la Sección 2.1 como la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton de la Sección 2.2 convergen a $\sqrt{2}$, y g es continua en $\sqrt{2}$, podemos aproximar el valor mínimo

$$g(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} = -5{,}656854249\ldots$$

por medio de las sucesiones $\big(g(c_n)\big)_{n>0}$ y $\big(g(a_n)\big)_{n>0}$. En la Tabla 10.1 listamos algunos de los valores de ambas sucesiones. Es interesante notar que, independientemente de la diferencia de la velocidad de convergencia de ambas sucesiones a $\sqrt{2}$, cada vez que el desarrollo decimal de c_n o a_n comienza con 1,414, el desarrollo decimal del correspondiente valor $g(c_n)$ o $g(a_n)$ comienza con $-5{,}65685$. Esto ocurre para a_n con $n \geq 2$ y para c_n con $n = 6$ o $n \geq 10$. Así, la Tabla 10.1 sugiere que podríamos **aproximar $g(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$ con 5 dígitos decimales correctos si trabajamos con una aproximación a_n o c_n de $\sqrt{2}$ con al menos 3 dígitos decimales correctos**. Más aún, **esto parece ser independiente de la sucesión considerada**.

A fin de justificar estas observaciones empíricas, estimamos $|g(x) - g(\sqrt{2})|$ en función de $|x - \sqrt{2}|$. Tenemos que

$$|g(x) - g(\sqrt{2})| = |x^3 - 6x + 4\sqrt{2}| = |x^3 - 2\sqrt{2} - 6x + 6\sqrt{2}| = |x - \sqrt{2}|\,|x^2 + \sqrt{2}x - 4|.$$

Tabla 10.1.: El método de bisección y de Newton en el mínimo de $g(x) := x^3 - 6x^2$.

n	c_n	$g(c_n)$	a_n	$g(a_n)$
0	1.50000000000	-5.625000000	1.50000000000	-5.625000000
1	1.25000000000	-5.546875000	1.41666666667	-5.656828704
2	1.37500000000	-5.650390625	1.41421568627	-5.656854249
3	1.43750000000	-5.654541016	1.41421356237	-5.656854249
4	1.40625000000	-5.656585693	1.41421356237	-5.656854249
5	1.42187500000	-5.656604767	1.41421356237	-5.656854249
6	1.41406250000	-5.656854153	1.41421356237	-5.656854249
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	1.41455078125	-5.656853767	1.41421356237	-5.656854249

Observamos que todos los términos a_n y c_n pertenecen al intervalo $[1,2]$. Teniendo en cuenta que la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) := x^2 + \sqrt{2}x - 4$ es creciente en dicho intervalo, deducimos que

$$|x^2 + \sqrt{2}x - 4| \leq \text{máx}\{|h(1)|, |h(2)|\} = h(2) = 2\sqrt{2}$$

para cada $x \in [1,2]$. En consecuencia,

$$|g(x) - g(\sqrt{2})| \leq 2\sqrt{2}|x - \sqrt{2}|.$$

Si bien esto no explica que obtengamos aproximaciones de 5 dígitos de $g(\sqrt{2})$ a partir de aproximaciones de 3 dígitos de $\sqrt{2}$ (debido a que no hemos tenido en cuenta que $h(\sqrt{2}) = 0$), sí muestra que podemos obtener aproximaciones de $g(\sqrt{2})$ con la precisión que deseemos, con tal de aproximar suficientemente bien $\sqrt{2}$, **independientemente de la sucesión elegida para aproximar a** $\sqrt{2}$.

10.1. Otra caracterización de la continuidad

Lo que hemos dicho en el caso de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x^3 - 6x$ y $x := \sqrt{2}$ ilustra un fenómeno general: si queremos aproximar $f(\alpha)$ por medio de un valor $f(a_n)$, siendo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a α, la precisión que provee dicha aproximación no depende de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sino de la **calidad de la aproximación** a_n de α considerada. Es decir, dados $\varepsilon > 0$ y una sucesión de aproximaciones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a α, si tenemos una aproximación a_n "suficientemente precisa", es decir, si $|a_n - \alpha| < \delta$, entonces automáticamente podemos concluir que $|f(a_n) - f(\alpha)| < \varepsilon$, **independientemente de la sucesión** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en consideración. Éste es el contenido del enunciado a continuación.

Lema 10.1.1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\alpha \in A$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$ para cada $x \in A$ con $|x - \alpha| < \delta$.*

Demostración. Supongamos que no existe $\delta > 0$ que satisface las condiciones del enunciado. Esto

significa que, para cada $\delta > 0$, existe $a_\delta \in A$ tal que

$$|a_\delta - \alpha| < \delta \quad \text{y} \quad |f(a_\delta) - f(\alpha)| \geq \varepsilon.$$

En particular, si elegimos $\delta := 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que existe $a_n \in A$ que satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

$$|a_n - \alpha| < 1/n \quad \text{y} \quad |f(a_n) - f(\alpha)| \geq \varepsilon.$$

Dado que $|a_n - \alpha| < 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α, en tanto que la estimación $|f(a_n) - f(\alpha)| \geq \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$ implica que $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(\alpha)$. En consecuencia, la función f no resulta continua en α, lo que concluye la demostración. □

El resultado precedente afirma que la condición que asegura que $f(x)$ es una aproximación "suficientemente precisa" de $f(\alpha)$, es decir, que $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$, **depende solo de la calidad de la aproximación** x de α, es decir, de que se satisfaga la condición $|x-\alpha| < \delta$ para cierto $\delta > 0$, a determinar en función de ε. A su vez, este comportamiento **caracteriza** la continuidad, como muestra nuestro siguiente resultado.

Teorema 10.1.2 (Otra caracterización de la continuidad)**.** *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Entonces f es continua en $\alpha \in A$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$ para cada $x \in A$ que satisface la condición $|x-\alpha| < \delta$.*

Demostración. Dado que la afirmación "solo si" es precisamente el Lema 10.1.1, resta demostrar la recíproca. Supongamos entonces que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$ si $|x-\alpha| < \delta$. A fin de probar que f es continua en α, sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de A que converge a α. Se trata de ver que $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\alpha)$. Para esto, dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $|f(a_n) - f(\alpha)| < \varepsilon$ siempre que $|a_n - \alpha| < \delta$. Ahora bien, dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \alpha| < \delta$ para cada $n \geq n_0$. Por lo tanto, $|f(a_n) - f(\alpha)| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$, lo que demuestra que $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\alpha)$. Concluimos que f es continua en α. □

Ejemplo 10.1.3. *Aplicamos esta nueva definición de continuidad en un ejemplo sencillo: se trata de demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ es continua en $x := \sqrt{2}$.*

Fijemos $\varepsilon > 0$ y demostremos que $|f(x) - f(\sqrt{2})| < \varepsilon$ si $|x - \sqrt{2}|$ es "suficientemente chico". Observamos que

$$|f(x) - f(\sqrt{2})| = |x^2 - 2| = |x - \sqrt{2}|\,|x + \sqrt{2}|.$$

Dado que nos interesa el comportamiento de la diferencia $|f(x) - f(\sqrt{2})|$ para valores de x cercanos a $\sqrt{2}$, esto es, **cuando** $|x - \sqrt{2}|$ **es suficientemente chico, podemos suponer sin pérdida de generalidad que** $|x - \sqrt{2}| < 1$*. En tal caso, resulta $\sqrt{2} - 1 < x < \sqrt{2} + 1$, de donde deducimos que $|x + \sqrt{2}| < 2\sqrt{2} + 1 \leq 4$. En consecuencia, para cada x tal que $|x - \sqrt{2}| < 1$, resulta*

$$|f(x) - f(\sqrt{2})| < 4|x - \sqrt{2}|.$$

Concluimos que si $|x-\sqrt{2}| < \text{mín}\{1,\varepsilon/4\}$, *entonces* $|f(x)-f(\sqrt{2})| < \varepsilon$, *lo que demuestra que* f *es continua en* $x=\sqrt{2}$.

10.1.1. Continuidad de las funciones trigonómetricas

En esta sección introducimos las funciones trigonométricas seno y coseno y demostramos que resultan continuas.

En la literatura matemática las funciones seno y coseno han sido definidas de diversas maneras: como coordenadas de los puntos de una circunferencia de radio 1, a partir de áreas de ciertas figuras contenidas en un círculo de radio 1, por expresiones explícitas en términos de series de potencias y también como soluciones de ecuaciones diferenciales. Aquí vamos a seguir la primera opción, dado que resulta la de significado geométrico más claro, señalando de todas maneras las dificultades de tal definición. En el capítulo sobre integración de funciones diferenciables (Capítulo 16) vamos a retomar esta cuestión, proveyendo una definición más satisfactoria que la de esta sección.

En lo que sigue, del mismo modo que cuando definimos el número π (Sección 6.4.1), **vamos a suponer que es posible "medir" la longitud del arco que define un ángulo dado en la circunferencia unidad**, esto es, que **la medida de un ángulo en radianes está bien definida**. Esta dificultad ha llevado a algunos autores a introducir las funciones trigonométricas en términos de áreas (ver, por ejemplo, [Har67, §163] o [Spi92, Capítulo 15]).

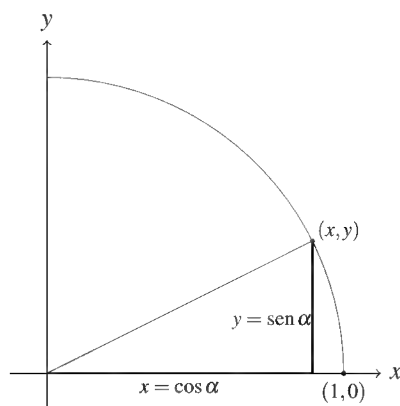


Figura 10.1.: La definición $\text{sen}(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ para $\alpha \in [0,\pi/2]$.

Consideremos entonces el "arco continuo" de longitud α que "recorre" en sentido antihorario la circunferencia unidad, "comenzando" en el punto $(1,0)$ y "terminando" en un punto (x,y) (ver la Figura 10.1). De nuestra caracterización de π, como la mitad de la longitud de la circunferencia de radio 1 (Teorema 6.4.6), concluimos que dicha longitud α es un número real que pertenece al intervalo $[0,2\pi]$. Más aún, en lo que sigue **vamos a suponer que cada $\alpha \in [0,2\pi]$ corresponde a un único arco continuo** de este tipo. Definimos entonces **los valores seno de α y coseno de α** (que notamos como habitualmente por $\text{sen}\,\alpha$ y $\cos\alpha$) **por las coordenadas** x e y del punto

"final" (x,y) del arco continuo de longitud α, comenzando en $(0,1)$. A su vez, extendemos estas definiciones a $\mathbb{R}$ de modo que seno resulte una función impar, coseno resulte una función par y ambas resulten periódicas de período 2π, es decir,

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \quad \text{para cada } x \in [-2\pi, 0]; \tag{10.1}$$

$$\cos(x) = \cos(x+2\pi) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x+2\pi) \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}. \tag{10.2}$$

Las condiciones (10.1) y (10.2) definen unívocamente dos funciones $\operatorname{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo tal que coinciden con la definición "geométrica" en el intervalo $[0,2\pi]$.

De la trigonometría elemental sabemos que, para cada par de puntos $x,y \in [0,2\pi]$, se satisfacen las identidades:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y, \tag{10.3}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{10.4}$$

Por la periodicidad (10.2) de las funciones seno y coseno concluimos que estas identidades se satisfacen para cada par de puntos $x,y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 10.1.4. *Demostrar las siguientes identidades para cada $x,y \in \mathbb{R}$:*

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right), \ \cos x - \cos y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{y-x}{2}\right). \tag{10.5}$$

Continuidad de las funciones seno y coseno

A fin de demostrar la continuidad de las funciones seno y coseno, de (10.4) deducimos que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Combinando esta observación con (10.5) concluimos que

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq 2 \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \quad \text{y} \quad |\cos x - \cos y| \leq 2 \left|\operatorname{sen}\left(\frac{y-x}{2}\right)\right| \tag{10.6}$$

para cada par de puntos $x,y \in \mathbb{R}$.

Fijemos $\alpha \in [0,2\pi]$ y veamos que las funciones seno y coseno resultan continuas en α. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-\alpha| \leq \pi/2$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \geq \alpha$. Tenemos entonces $0 \leq x - \alpha \leq \pi/2$, y por lo tanto, de la Figura 10.2 deducimos que

$$0 \leq \operatorname{sen}(x-\alpha) \leq x - \alpha. \tag{10.7}$$

Similarmente, si $x \leq \alpha$, entonces $-\pi/2 \leq x - \alpha \leq 0$, y por lo tanto,

$$0 \geq \operatorname{sen}(x-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha - x) \geq -(\alpha - x) = x - \alpha. \tag{10.8}$$

De (10.7) y (10.8) concluimos que, si $|x-\alpha| < \pi/2$, entonces $|\operatorname{sen}(x-\alpha)| \leq |x-\alpha|$. Por lo tanto, de (10.6) deducimos que

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \alpha| \leq |x-\alpha| \quad \text{y} \quad |\cos x - \cos \alpha| \leq |x-\alpha|. \tag{10.9}$$

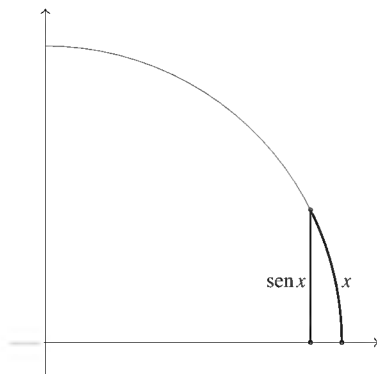


Figura 10.2.: Una demostración gráfica de la desigualdad $\operatorname{sen}(x) \leq x$ para $0 \leq x \leq \pi/2$.

Es fácil entonces concluir que tanto seno como coseno resultan continuas en α: dado $\varepsilon > 0$, tenemos que si $|x-\alpha| < \text{mín}\{\pi/2, \varepsilon\}$, entonces la estimación (10.9) resulta válida, y por lo tanto, $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \alpha| < \varepsilon$ y $|\cos x - \cos \alpha| < \varepsilon$, como queríamos demostrar. En conclusión, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 10.1.5. *Las funciones trigonométricas* $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *son continuas en cada* $\alpha \in \mathbb{R}$.

10.1.2. Continuidad Lipschitz

Cabe observar que las funciones seno y coseno satisfacen una condición más fuerte que la continuidad, que expresa la estimación (10.9): el "incremento" $|f(x) - f(y)|$ de cualquiera de estas funciones se "controla" de forma lineal en términos del incremento $|x-y|$, es decir, existe una constante $L \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \tag{10.10}$$

para cada par de puntos x e y en el dominio de f. Una función que satisface la condición (10.10) se denomina **Lipschitz continua**.

Ejemplo 10.1.6. *Consideremos la función* $f : [1/2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$. *Afirmamos que* f *es Lipschitz continua. En efecto, dados* $x, y \in [1/2, +\infty)$, *tenemos que*

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{xy}|x-y| \leq 4|x-y|.$$

Por otro lado, la función $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) := 1/x$ *no es Lipschitz continua. En efecto, argumentando como con la función* f, *tenemos que*

$$|g(x) - g(y)| = \frac{1}{xy}|x-y|$$

para cada par de puntos $x, y \in (0, +\infty)$. *En consecuencia, eligiendo* x *e* y *suficientemente cerca de*

0 podemos hacer que la fracción $1/xy$ *tome valores arbitrariamente grandes, de donde concluimos que no existe* $L \geq 0$ *tal que* $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$ *para cada par de puntos* $x, y \in (0, +\infty)$.

El ejemplo precedente pone de manifiesto que **la continuidad Lipschitz es una propiedad global**, es decir, una propiedad que involucra todos los puntos del dominio de la función en consideración. Asimismo, vemos también que **una función continua no necesariamente es Lipschitz continua**. Por otro lado, una función Lipschitz continua es necesariamente continua, como pedimos demostrar en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 10.1.7. *Sea* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función Lipschitz continua. Demostrar que* f *es continua.*

Ejercicio 10.1.8 (Propiedades aritméticas de las funciones Lipschitz continuas)**.** *Sean* $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funciones Lipschitz continuas.*

1. *Demostrar que* $f + g : A \to \mathbb{R}$ *es Lipschitz continua.*

2. *Demostrar que* $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ *no necesariamente es Lipschitz continua.* (Sugerencia: analizar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$.)

3. *Demostrar que si* f *y* g *son acotadas, entonces* $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ *es Lipschitz continua.*

Del ejercicio precedente concluimos que si A es un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, o más generalmente, un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, entonces el producto de dos funciones Lipschitz continuas $f, g : A \to \mathbb{R}$ resulta Lipschitz continua. De acuerdo con el Teorema 10.1.5, las funciones seno y coseno son Lipschitz continuas. Asimismo, como vamos a ver más adelante, la restricción de cualquier función polinómica o exponencial a un intervalo $[a, b]$ resulta Lipschitz continua. Así, vemos que la restricción a cualquier intervalo $[a, b]$ (o, más generalmente, a un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$) de la mayoría de las funciones "conocidas" del cálculo resulta Lipschitz continua.

10.1.3. Límites "continuos"

Observamos que subyace a la nueva caracterización de la continuidad del Teorema 10.1.2 una afirmación sobre el **comportamiento** de la función f en torno a α. En efecto, podemos interpretar informalmente la condición "para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$ si $|x - \alpha| < \delta$" como una descripción del comportamiento de $f(x)$ para valores de x cercanos a α: dada una "precisión admisible" $\varepsilon > 0$, el valor de $f(x)$ **resulta una "buena" aproximación de** $f(\alpha)$ **para cada** x **"suficientemente cercano" a** α, y por lo tanto, el "comportamiento" de f "cerca" de α resulta claro: $f(x)$ es aproximadamente $f(\alpha)$. Esta **caracterización de la existencia de un "buen comportamiento"** de f en torno a un punto α de su dominio no es privativo de las funciones continuas: los valores $f(x)$ que toma una función f para valores de x cercanos a α pueden "acercarse progresivamente" a un valor ℓ dado (excluyendo eventualmente el caso $x = \alpha$ en sí), **sin que** f **esté definida en** α **o sea** $f(\alpha) = \ell$. En tal caso, diremos que el **límite de** f **cuando** x **tiende a** α **es** ℓ. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

Definición 10.1.9 (Caracterización $\varepsilon - \delta$ del límite)**.** *Sea* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una función. Diremos que el límite de* f *cuando* x *tiende a* $\alpha \in (a, b)$ *es* ℓ*, y lo notamos en la forma* $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell$*, si y solo si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ *si* $0 < |x - \alpha| < \delta$.

Ejemplo 10.1.10. *Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) := x \operatorname{sen}(1/x)$. Estudiamos la existencia del límite de f cuando x tiende a 0. Tenemos que*

$$|f(x)| = |x \operatorname{sen}(1/x)| \leq |x|$$

para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, tenemos $|f(x) - 0| < \varepsilon$ para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ que satisface la condición $|x| < \varepsilon$. En consecuencia, resulta $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Propiedades de los límites continuos

En estos términos, observamos que, si existe, el límite de una función f cuando x tiende a α está unívocamente determinado por f y α (con lo cual la notación $\ell = \lim_{x \to \alpha} f(x)$ resulta consistente). Más precisamente, si $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell_1$ y $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \ell_2$, afirmamos que $\ell_1 = \ell_2$. En efecto, fijemos $\varepsilon > 0$ y sean $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

- $|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$ si $0 < |x - \alpha| < \delta_1$;
- $|f(x) - \ell_2| < \varepsilon$ si $0 < |x - \alpha| < \delta_2$.

En consecuencia, si $0 < |x - \alpha| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces tenemos que

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| < 2\varepsilon.$$

Dado que esta estimación resulta válida para cada $\varepsilon > 0$, concluimos que $\ell_1 = \ell_2$, es decir, hemos demostrado el siguiente resultado (comparar con el correspondiente resultado para límites de sucesiones (Lema 3.1.25)).

Lema 10.1.11 (Unicidad del límite). *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función y sea $\alpha \in (a,b)$. Si f tiende simultáneamente a ℓ_1 y a ℓ_2 cuando x tiende a α, entonces $\ell_1 = \ell_2$.*

De forma similar a lo que ocurre en los límites de sucesiones (Teorema 3.1.27), los límites continuos tienen un "buen comportamiento" en relación con las operaciones aritméticas, lo que simplifica en ocasiones su determinación.

Ejercicio 10.1.12 (Propiedades aritméticas de los límites). *Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que existen los límites $\ell_1 := \lim_{x \to \alpha} f(x)$ y $\ell_2 := \lim_{x \to \alpha} g(x)$.*

- *Demostrar que existe $\lim_{x \to \alpha} (f+g)(x)$ y es igual a $\ell_1 + \ell_2$.*
- *Demostrar que existe $\lim_{x \to \alpha} (fg)(x)$ y es igual a $\ell_1 \ell_2$.* (Sugerencia: usar la identidad $|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| = |f(x)g(x) - \ell_1 g(x) + \ell_1 g(x) - \ell_1 \ell_2|$.)
- *Si $\ell_2 \neq 0$, demostrar que existe $\lim_{x \to \alpha} (1/g)(x)$ y es igual a $1/\ell_2$.*
- *Si $\ell_2 \neq 0$, demostrar que existe $\lim_{x \to \alpha} (f/g)(x)$ y es igual a ℓ_1/ℓ_2.*

En términos de límites continuos, podemos expresar la nueva caracterización de continuidad (Teorema 10.1.2) diciendo que una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es continua en $\alpha\in(a,b)$ si y solo si $\lim_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$. Existe sin embargo una diferencia sutil entre la caracterización del Teorema 10.1.2 y su expresión en términos de límites, que conviene tener en cuenta: en la caracterización de la continuidad consideramos el valor $x=\alpha$, dado que exigimos que resulte $|f(x)-f(\alpha)|<\varepsilon$ para cada $x\in(a,b)$ tal que $|x-\alpha|<\delta$, mientras que, en la definición de límite (Definición 10.1.9), la condición $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ debe ser satisfecha por cada $x\in(a,b)$ tal que $0<|x-\alpha|<\delta$, y por lo tanto, no necesariamente por $x=\alpha$. Esto se debe a que, en este último caso, estamos determinando la existencia de un **comportamiento asintótico**, y éste no depende de la definición de f en $x=\alpha$, sino de lo que ocurre con $f(x)$ a medida que x **se acerca** a α.

Ejercicio 10.1.13. *Recordamos la definición de las funciones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante. Si $A:=\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ y $B:=\{\pi/2+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$ son los conjuntos de ceros de las funciones seno y coseno respectivamente, entonces*

- *la función* **tangente** $\operatorname{tg}:\mathbb{R}\setminus B\to\mathbb{R}$ *se define como* $\operatorname{tg}(x):=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$*;*
- *la función* **cotangente** $\operatorname{cotg}:\mathbb{R}\setminus A\to\mathbb{R}$ *se define como* $\operatorname{cotg}(x):=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$*;*
- *la función* **secante** $\sec:\mathbb{R}\setminus B\to\mathbb{R}$ *se define como* $\sec(x):=\dfrac{1}{\cos x}$*;*
- *la función* **cosecante** $\operatorname{cosec}:\mathbb{R}\setminus A\to\mathbb{R}$ *se define como* $\operatorname{cosec}(x):=\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}$.

Demostrar que todas estas funciones son continuas.

De forma análoga a lo que ocurre con la continuidad, la existencia de límites continuos puede caracterizarse en términos de sucesiones, como enunciamos a continuación.

Lema 10.1.14 (Límites continuos por sucesiones)**.** *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función y $\alpha\in(a,b)$. Entonces $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell$ si y solo si para cada sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(a,b)\setminus\{\alpha\}$ que converge a α, la sucesión $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.*

Ejercicio 10.1.15. *Demostrar el Lema 10.1.14.* (Sugerencia: “copiar” las demostraciones del Lema 10.1.1 y el Teorema 10.1.2.)

Ejercicio 10.1.16. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por*

$$f(x):=\begin{cases} 0 & si\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\\ x & si\ x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Analizar la continuidad de f en $x=0$.

Ejercicio 10.1.17. *Demostrar que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x):=\begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & si\ x\neq 0,\\ 0 & si\ x=0,\end{cases}$$

no es continua en $x=0$.

Extensiones del concepto de límite "continuo"

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y sea $\alpha \in [a,b]$. En muchas situaciones es necesario estudiar el comportamiento asintótico de f en $x = \alpha$ considerando solamente los puntos $x \in [a,\alpha)$ o $(\alpha,b]$. En tal sentido, decimos que

- **f tiende a ℓ cuando x tiende a α por izquierda**, y escribimos $\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \ell$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ siempre que $0 < \alpha - x < \delta$.
- **f tiende a ℓ cuando x tiende a α por derecha**, y escribimos $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \ell$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ siempre que $0 < x - \alpha < \delta$.

Ejemplo 10.1.18. *Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|/x$. Observamos que*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1.$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Observamos que el hecho de que ambos límites laterales no coincidan nos da la pauta de que f **no posee un comportamiento definido cuando x tiende a** 0*. En efecto, si consideramos las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (-1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (1/n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = -1 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

En consecuencia, la caracterización de los límites continuos en términos de sucesiones (Lema 10.1.14) nos asegura que no existe el límite de f cuando x tiende a 0.

Ejercicio 10.1.19 (Unicidad de los límites laterales)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y sea $\alpha \in [a,b]$. Demostrar que si $\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \ell_1$ y $\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \ell_2$, entonces $\ell_1 = \ell_2$. Demostrar que lo mismo ocurre para los límites laterales por derecha.*

Ejercicio 10.1.20 (Existencia de límite por límites laterales)**.** *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función y sea $\alpha \in (a,b)$. Demostrar que existe el límite de f cuando x tiende a α si y solo si ambos límites laterales de f existen y coinciden cuando x tiende a α, esto es,*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \text{ si y solo si } \lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \ell.$$

Otra situación que nos interesa describir es aquella en la cual los valores de una función crecen por encima de toda cota a medida que el valor de x se acerca a un valor determinado. Más precisamente, sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función y $\alpha \in (a,b)$. Decimos que f **tiende a infinito cuando x tiende a α**, y escribimos $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$, si $\lim_{x\to\alpha} 1/f(x) = 0$.

Ejemplo 10.1.21. *Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$. Observamos que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

de lo que concluimos que $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.

Ejemplo 10.1.22. *Sea* $B := \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ *y* $f : \mathbb{R}\setminus B \to \mathbb{R}$ *la función tangente, esto es,* $f(x) := \operatorname{tg}(x) := \operatorname{sen} x/\cos x$. *Observamos que*

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos(\pi/2)}{\operatorname{sen}(\pi/2)} = 0,$$

de lo que concluimos que $\lim_{x\to\pi/2} \operatorname{tg} x = \infty$. *Más generalmente, si* $b := \pi/2 + 2k_0\pi$ *es cualquier elemento de B, tenemos entonces que* $\operatorname{sen} b \neq 0$, *y por lo tanto,*

$$\lim_{x\to b} \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to b} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos b}{\operatorname{sen} b} = \frac{\cos(\pi/2 + 2k_0\pi)}{\operatorname{sen}(\pi/2 + 2k_0\pi)} = \frac{\cos(\pi/2)}{\operatorname{sen}(\pi/2)} = 0.$$

Concluimos nuevamente que $\lim_{x\to b} \operatorname{tg} x = \infty$.

Ejercicio 10.1.23. *Sean* $A := \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ *y* $B := \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. *Si a y b son dos elementos arbitrarios de A y B respectivamente, demostrar que*

$$\lim_{x\to a} \operatorname{cotg} x = \infty, \qquad \lim_{x\to a} \operatorname{cosec} x = \infty, \qquad \lim_{x\to b} \sec x = \infty.$$

Ejercicio 10.1.24. *Demostrar que una función* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *tiende a infinito cuando x tiende a* $\alpha \in (a,b)$ *si y solo si para cada* $M > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x)| > M$ *para cada x con* $0 < |x - \alpha| < \delta$.

Finalmente, consideramos el comportamiento de funciones cuando x tiende a infinito. Si $\ell \in \mathbb{R}$, o ℓ es alguno de los símbolos $+\infty$, $-\infty$ o ∞, tenemos las siguientes definiciones:

- una función $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ **tiende a** ℓ **cuando** x **tiende a más infinito**, y lo notamos por $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, si $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = \ell$;
- una función $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ **tiende a** ℓ **cuando** x **tiende a menos infinito**, y lo notamos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, si $\lim_{x\to 0^-} f(1/x) = \ell$;
- una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **tiende a** ℓ **cuando** x **tiende a infinito** (a secas), y lo notamos $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$, si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

Ejemplo 10.1.25. *Consideremos la función* $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x/x$. *Afirmamos que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. *En efecto, para cada* $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, *tenemos que*

$$\left|f\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|.$$

Por lo tanto, si $|x| < \varepsilon$, *entonces* $|f(1/x)| < \varepsilon$, *lo que demuestra que* $\lim_{x\to 0} f(1/x) = 0$. *En consecuencia, vemos que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, *como queríamos demostrar.*

Ejercicio 10.1.26. *Demostrar que no existe* $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$.

Ejercicio 10.1.27. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.*

1. *Demostrar que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ *si y solo si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $M > 0$ *tal que* $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ *para cada* $x > M$.

2. *Enunciar y demostrar una caracterización análoga a la del ítem anterior del límite de f cuando x tiende a menos infinito, y cuando x tiende a infinito.*

Ejercicio 10.1.28. *Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_s\} \to \mathbb{R}$ una función racional, y sean $p, q \in \mathbb{R}[x]$ tales que $f(x) = p(x)/q(x)$ para cada $x \notin \{a_1, \dots, a_s\}$. Demostrar que:*

- *si* $\operatorname{gr}(p) < \operatorname{gr}(q)$, *entonces* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$;
- *si* $\operatorname{gr}(p) > \operatorname{gr}(q)$, *entonces* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
- *si* $\operatorname{gr}(p) = \operatorname{gr}(q)$, *entonces* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha \neq 0$.

Ejercicio 10.1.29 (“Las exponenciales crecen más rápido que las polinómicas”)**.** *En el Ejercicio 3.1.13 comparamos sucesiones con crecimiento exponencial y polinomial. El propósito de este ejercicio es generalizar estos resultados, estableciendo comparaciones sobre el comportamiento asintótico de funciones polinómicas y exponenciales.*

1. *Sean $a > 1$ y $k \in \mathbb{N}$. Demostrar que* $\lim_{x\to+\infty} x^k/a^x = 0$. (Sugerencia: rever las acotaciones del Ejercicio 3.1.13.)

2. *Más generalmente, si $a > 1$ y $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, demostrar que* $\lim_{x\to+\infty} p(x)/a^x = 0$.

Ejercicio 10.1.30. *El propósito del presente ejercicio es estudiar el límite* $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$.

1. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que tiende a más infinito. Si $n, k \in \mathbb{N}$ son tales que se satisfacen las desigualdades $k \le a_n \le k+1$, demostrar que*

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} \ge \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \ge \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k}.$$

   Deducir de lo anterior que $\lim_{n\to\infty}(1+1/a_n)^{a_n} = e$.

2. *Concluir que* $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e$.

Límite de una composición de funciones

Sean $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que la composición $g \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ está bien definida. Supongamos que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ y $\lim_{x\to\beta} g(x) = \gamma$. En estas condiciones, nos gustaría poder afirmar que $\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = \gamma$. Sin embargo, de acuerdo a la definición de límite, si llamamos $y = f(x)$, tenemos que $g(y)$ se “acerca” a γ cuando y tiende a β, **siempre que** $y \neq \beta$. Desafortunadamente, de acuerdo con nuestras hipótesis, nada garantiza que $f(x) \neq \beta$ para x “cercano” a α, por lo que no necesariamente ocurre que $\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = \gamma$.

A fin de entender qué es lo que ocurre, veamos un ejemplo simple que ilustra este fenómeno. Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x):=0 \quad \text{y} \quad g(x):=\begin{cases} 1 & \text{si } x\neq 0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

Entonces $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ y $\lim_{x\to 0} g(x)=1$, pero $\lim_{x\to 0} g(f(x))=0$. ¿Qué es lo que está pasando? Ocurre que $f(x)=0$ para x cercano a 0, por lo que los valores $g(f(x))$ no representan el comportamiento de g **cerca de** 0, **sino en** 0.

Ahora bien, si g es continua en $x=\beta$, entonces el comportamiento de g para x cercano a β coincide con el de g en $x=\beta$, por lo que esta dificultad no aparece. Así, tenemos el siguiente resultado (valen enunciados del mismo tipo para límites infinitos).

Lema 10.1.31 (Límite de una composición)**.** *Sean $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ dos funciones tales que $f\big((a,b)\big)\subset(c,d)$. Sea $\alpha\in(a,b)$ un punto tal que $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\beta$ y $\lim_{x\to\beta} g(x)=g(\beta)$. Entonces $\lim_{x\to\alpha} g(f(x))=g(\beta)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon>0$. Por la continuidad de g en $y=\beta$ tenemos que existe $\delta'>0$ tal que si $|y-\beta|<\delta'$ entonces $|g(y)-g(\beta)|<\varepsilon$. Asimismo, existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-\alpha|<\delta$, entonces $|f(x)-\beta|<\delta'$. En consecuencia, si $0<|x-\alpha|<\delta$ resulta $|f(x)-\beta|<\delta'$, y por lo tanto, $|g(f(x))-g(\beta)|<\varepsilon$. En consecuencia, tenemos que $\lim_{x\to\alpha} g(f(x))=g(\beta)$, como queríamos demostrar. □

Este resultado puede ser útil en el cálculo de límites, dado que nos permite realizar **cambios de variables** que pueden simplificar el límite en consideración, como ilustramos en el ejemplo a continuación.

Ejemplo 10.1.32. *Para $a\in\mathbb{R}$, queremos analizar el límite*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $a\neq 0$, dado que si $a=0$, resulta

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{0}{x}\right)^x=1.$$

Como $a\neq 0$, por la continuidad de la potenciación real (Ejercicio 9.1.16) y el resultado sobre el límite de una composición (Lema 10.1.31) concluimos que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right)^a=\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right)^a,$$

siempre que el límite de la derecha exista. Asimismo, si $y:=x/a$, tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e,$$

donde la primera igualdad es correcta debido a que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=x/a$ es continua y la segunda igualdad es el Ejercicio 10.1.30. En conclusión, tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=e^{a}.$$

Ejercicio 10.1.33. *Sea $a\in\mathbb{R}$. Demostrar que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{-x}=e^{-a}$.

Ejercicio 10.1.34. *Sea $a\in\mathbb{R}$. Demostrar que* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=e^{a}$.

Ejercicio 10.1.35. *Sean $k\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{R}[x]$ y $a>1$. Probar que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x^{1/k})}{a^{x}}=0$.

10.2. Caracterizaciones topológicas de la continuidad

Sea $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función. Partiendo de la consideración de lo que hemos denominado un "buen comportamiento local", hemos dicho que f es continua en $\alpha\in A$ si y solo si existe $\lim_{x\to\alpha}f(x)$ y es igual a $f(\alpha)$. Más generalmente, diremos que f **es continua (a secas) si es continua en cada punto de** A.

Ejemplo 10.2.1. *La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=x^2$ es continua. En efecto, dado $\alpha\in\mathbb{R}$, por las propiedades aritméticas de los límites continuos (Ejercicio 10.1.12) tenemos que* $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}x^2=\alpha^2=f(\alpha)$.

Ejercicio 10.2.2. *Demostrar que cualquier función $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ es continua.*

Ejercicio 10.2.3. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua tal que* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$.

1. *Probar que la imagen* $\mathrm{Im}(f)$ *de f es un conjunto acotado de números reales.*

2. *Sea $A:=\mathrm{Im}(f)$, $c:=\sup A$ y $d:=\inf A$. Probar que $c\geq 1$ y $d\leq 1$.*

La definición "local–global" de continuidad de una función $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (f es continua si es continua en cada punto de A), si bien absolutamente correcta desde el punto de vista matemático, tiene el inconveniente de que se "pierde" el aspecto global que intuitivamente le asignamos a la noción de continuidad. Por tal motivo, vamos a estudiar la continuidad desde un punto de vista "global", caracterizándola en términos "topológicos", es decir, a partir de la acción de f sobre determinados tipos de conjuntos.

Para esto, comenzamos observando que la continuidad local puede redescribirse en términos conjuntistas. En efecto, sea $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función y $\alpha\in A$. Sabemos que f es continua en A si para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que

$$x\in A \text{ y } |x-\alpha|<\delta \text{ implica } |f(x)-f(\alpha)|<\varepsilon.$$

Analizamos el significado de esta implicación. Lo que estamos diciendo es que **la imagen de cada elemento de A que dista de α en menos de δ**, es decir, la imagen $f(x)$ de cada elemento

del conjunto $\{x \in A : |x - \alpha| < \delta\} = A \cap (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, satisface una cierta propiedad de cercanía, $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$, o equivalentemente, pertenece al conjunto $(f(\alpha) - \varepsilon, f(\alpha) + \varepsilon)$. Podemos entonces reexpresar la implicación anterior de la forma siguiente (ver la Figura 10.3):

$$x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap A \text{ implica } f(x) \in (f(\alpha) - \varepsilon, f(\alpha) + \varepsilon). \tag{10.11}$$

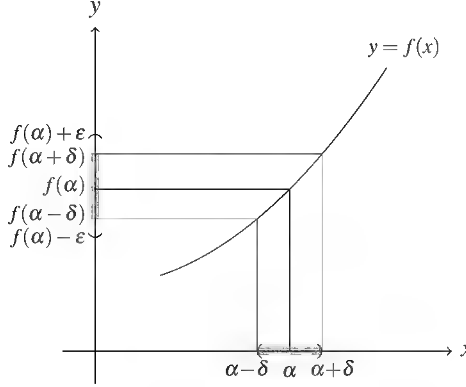


Figura 10.3.: Una elección de ε y δ tal que se satisface (10.11).

Introducimos algunas notaciones para describir esta implicación en forma más compacta. El intervalo $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ se denomina el **disco** $D(\alpha, \delta)$ **de radio** $\delta > 0$ **y centro** α. Asimismo, tenemos el disco $D(f(\alpha), \varepsilon) := (f(\alpha) - \varepsilon, f(\alpha) + \varepsilon)$. Por último, el conjunto de los elementos $x \in A$ tales que $f(x) \in D(f(\alpha), \varepsilon)$ es lo que hemos denominado la **imagen inversa (o preimagen)** $f^{-1}\big(D(f(\alpha), \varepsilon)\big)$ **de** $D(f(\alpha), \varepsilon)$ **por** f, es decir,

$$f^{-1}\big(D(f(\alpha), \varepsilon)\big) := \big\{x \in A : f(x) \in D(f(\alpha), \varepsilon)\big\}.$$

Ejemplo 10.2.4. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función $f(x) := x^2$ y $A := (4, 9]$, entonces la preimagen $f^{-1}(A)$ de A por f es el conjunto $[-3, -2) \cup (2, 3]$, en tanto que la preimagen $f^{-1}(B)$ por f del intervalo $B := (-5, 4)$ es el intervalo $(-2, 2)$ (observamos que ésta coincide con la preimagen $f^{-1}(C)$ del intervalo $C := [0, 4)$).*

La implicación anterior expresa que la **imagen** de cada elemento $x \in D(\alpha, \delta) \cap A$ pertenece al disco $D(f(\alpha), \varepsilon)$, o lo que es lo mismo, cada elemento $x \in D(\alpha, \delta) \cap A$ pertenece al conjunto $f^{-1}\big(D(f(\alpha), \varepsilon)\big)$. Dicho de otro modo, tenemos la inclusión

$$D(\alpha, \delta) \cap A \subset f^{-1}\big(D(f(\alpha), \varepsilon)\big). \tag{10.12}$$

Así obtenemos la siguiente caracterización de la continuidad de una función en un punto, que nos da la pauta de que la continuidad está íntimamente relacionada con la **forma que tiene la imagen inversa por dicha función de ciertos discos**.

Lema 10.2.5. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $\alpha \in A$. Entonces f es continua en α si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se satisface (10.12).*

10.2.1. Conjuntos abiertos

Pasamos ahora de la continuidad "local" (en un punto $\alpha \in A$) a la continuidad "global" (en A). Si f es continua en A, dado que $f^{-1}\big(D(f(\alpha),\varepsilon)\big)$ contiene un disco con centro en α para cada $\varepsilon > 0$ y cada $\alpha \in A$, resulta entonces que la imagen inversa de una **unión de discos** $\cup_{\alpha \in A} D\big(f(\alpha),\varepsilon_\alpha\big)$ contiene un disco en torno a cada punto $\alpha \in A$, que por lo tanto debe ser "algo similar" a un conjunto del mismo tipo, es decir, una unión de discos. Una **unión de discos de $\mathbb{R}$ es lo que denominamos un conjunto abierto** de $\mathbb{R}$. Más generalmente, **la intersección de una unión de discos de $\mathbb{R}$ con un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se denomina un conjunto abierto en A**.

Ejemplo 10.2.6. *Cada intervalo abierto (a,b) es un conjunto abierto, dado que $(a,b) = D((a+b)/2,(b-a)/2)$. Asimismo, $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto, dado que, por ejemplo, $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} D(n,1)$. Por otro lado, $(a,b) \cap \mathbb{Q}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{Q}$ para cada $a < b$.*

Ejercicio 10.2.7. *Probar que $(-\infty,a)$ y $(a,+\infty)$ son conjuntos abiertos para cada $a \in \mathbb{R}$. ¿Es cierto que cada conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}$ es conexo?*

Nuestra definición de conjunto abierto, que va a ser útil para obtener una caracterización global de la continuidad, es poco operativa, ya que a fin de demostrar que un subconjunto dado de $\mathbb{R}$ es abierto es necesario demostrar un resultado sobre su estructura global. La siguiente caracterización local de la propiedad de ser abierto resulta en general mucho más operativa.

Lema 10.2.8. *Sea $A \subset \mathbb{R}$. Un conjunto $U \subset A$ es abierto en A si y solo si para cada $\alpha \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $D(\alpha,\varepsilon) \cap A \subset U$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que U es un subconjunto abierto de A, es decir, U es de la forma $U = \cup_{i \in I} D(u_i,\varepsilon_i) \cap A$, donde I es un conjunto de índices y $\varepsilon_i > 0$ para cada $i \in I$. Sea $\alpha \in U$. Entonces existe $i \in I$ tal que $\alpha \in D(u_i,\varepsilon_i) \cap A \subset U$. Esto implica que $u_i - \varepsilon_i < \alpha < u_i + \varepsilon_i$. Sea $\delta := \min\{\alpha - (u_i - \varepsilon_i), (u_i + \varepsilon_i) - \alpha\} > 0$ la menor distancia de α a los extremos del disco $D(u_i,\varepsilon_i)$. Entonces

$$D(\alpha,\delta) \cap A \subset D(u_i,\varepsilon_i) \cap A \subset U,$$

como queríamos demostrar.

Recíprocamente, sea U un subconjunto de A tal que para cada $\alpha \in U$ existe $\varepsilon_\alpha > 0$ de forma tal que se satisface $D(\alpha,\varepsilon_\alpha) \cap A \subset U$. Entonces tenemos que $U = \cup_{\alpha \in U} D(\alpha,\varepsilon_\alpha) \cap A$: por un lado, U está contenido en la unión $\cup_{\alpha \in U} D(\alpha,\varepsilon_\alpha) \cap A$, ya que $\alpha \in D(\alpha,\varepsilon_\alpha) \cap A$ para cada $\alpha \in U$, y, por el otro lado, dado que se trata de conjuntos contenidos en U, la unión $\cup_{\alpha \in U} D(\alpha,\varepsilon_\alpha) \cap A$ está contenida en U. Esto prueba que U es una unión de discos. □

Ejercicio 10.2.9. *Sea $A \subset \mathbb{R}$.*

1. *Demostrar que $U \subset A$ es abierto en A si y solo si $A \setminus U$ es cerrado en A.*
2. *Sea $\{U_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos abiertos en A. Demostrar que $\cup_{i \in I} U_i$ es abierto en A.*

10.2.2. Continuidad en términos de conjuntos abiertos o cerrados

Retomando nuestra discusión sobre la continuidad, la imagen inversa de un conjunto abierto por una función continua $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ resulta un conjunto abierto de A. Más aún, esta propiedad caracteriza a su vez la continuidad.

Teorema 10.2.10 (Caracterización topológica de la continuidad). *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Entonces f es continua si y solo si, para todo subconjunto abierto U de $\mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}(U)$ es abierto en A.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que f es continua y sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Se trata entonces de demostrar que $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de A. Para esto, sea $\alpha \in f^{-1}(U)$. Tenemos que $f(\alpha) \in U$ (por la definición de imagen inversa), y por lo tanto, de la caracterización "local" de los conjuntos abiertos (Lema 10.2.8) deducimos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $D(f(\alpha), \varepsilon) \subset U$. Por la continuidad de f existe $\delta > 0$ tal que valen las inclusiones

$$D(\alpha, \delta) \cap A \subset f^{-1}\big(D(f(\alpha), \varepsilon)\big) \subset f^{-1}(U)$$

(Lema 10.2.5). Así, la caracterización local de los conjuntos abiertos (Lema 10.2.8) asegura que $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en A.

Recíprocamente, supongamos que $f^{-1}(U)$ es abierto en A para cada conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}$. Sea $\alpha \in A$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $f^{-1}\big(D(f(\alpha), \varepsilon)\big)$ es un conjunto abierto en A que contiene a α. Por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que $D(\alpha, \delta) \subset f^{-1}\big(D(f(\alpha), \varepsilon)\big)$, de donde concluimos que f es continua en α. □

Ahora expresamos la continuidad en términos de conjuntos cerrados. Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, tenemos que

- un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ es cerrado si y solo si $\mathbb{R} \setminus S$ es abierto;
- el conjunto $f^{-1}(S)$ es cerrado en A si y solo si $A \setminus f^{-1}(S)$ es abierto en A;
- $A \setminus f^{-1}(S) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus S)$ (Ejercicio 10.2.12).

La caracterización topológica de la continuidad (Teorema 10.2.10) nos asegura que f es continua si y solo si la imagen inversa de cada conjunto abierto $S \subset \mathbb{R}$ es abierta en A. Si la imagen inversa de cada conjunto cerrado $F \subset \mathbb{R}$ es cerrada en A, tomando complementos concluimos que lo mismo ocurre para conjuntos abiertos, de lo que concluimos que f es continua. Recíprocamente, si f es continua, entonces la imagen inversa de cada conjunto abierto es abierta en A, de lo cual, tomando complementos, deducimos que lo mismo ocurre con conjuntos cerrados. Vemos entonces que f es continua si y solo si la imagen inversa de cada conjunto cerrado es cerrada en A. En consecuencia, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 10.2.11 (Caracterizaciones topológicas de la continuidad). *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Entonces son equivalentes:*

1. *f es continua en A;*

2. *para todo subconjunto abierto U de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de A;*

3. *para todo subconjunto cerrado F de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(F)$ es un subconjunto cerrado de A.*

Ejercicio 10.2.12. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y S un subconjunto de $\mathbb{R}$.*

1. *Demostrar que $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus S) = A \setminus f^{-1}(S)$.*

2. *Completar la demostración del Teorema 10.2.11: demostrar la equivalencia entre 2. y 3.*

Ejemplo 10.2.13. *Cabe mencionar una consecuencia útil de las caracterizaciones topológicas de la noción de continuidad precedentes (Teorema 10.2.11): podemos deducir características topológicas de conjuntos definidos a partir de funciones continuas.*

Más precisamente, dada una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $A \subset \mathbb{R}$ es el conjunto de los ceros de f, entonces A es un conjunto cerrado. En efecto, dado que $\{0\}$ es un conjunto cerrado, f es continua y

$$A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}),$$

del Teorema 10.2.11 concluimos que A es cerrado. De modo similar, el conjunto

$$B := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = f^{-1}((0, +\infty))$$

de positividad de f es abierto. En efecto, dado que $(0, +\infty)$ es abierto y f es una función continua, de la identidad precedente concluimos que B es abierto.

Ejercicio 10.2.14. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que el conjunto de negatividad de f es abierto. ¿Qué se puede decir de los siguientes conjuntos*

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 1\},\ \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\},\ \{x \in \mathbb{R} : a < f(x) < b\},\ \{x \in \mathbb{R} : a \leq f(x) \leq b\}?$$

Ejercicio 10.2.15. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $\alpha \in A$ tal que $f(\alpha) \neq 0$. Demostrar que existe $\varepsilon > 0$ con la siguiente propiedad: si $x \in A$ y $|x - \alpha| < \varepsilon$, entonces $f(x) \neq 0$.*

10.2.3. Continuidad de la función inversa.

En la Sección 7.1 hemos definido la función raíz n–ésima $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $g(x) := \sqrt[n]{x}$ como la función inversa de la "potencia" n–ésima $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) := x^n$. En particular, hemos demostrado que la función raíz n–ésima es continua (Lema 7.1.15). Este ejemplo muestra un fenómeno que aparece con frecuencia: dados dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ y una función continua e inversible $f : A \to B$, se trata de estudiar el comportamiento de su función inversa $g : B \to A$.

En tal sentido, cabe preguntarse por la continuidad de la función inversa de una función continua. Con este nivel de generalidad, la respuesta es negativa: **la inversa de una función continua no es necesariamente continua**.

Ejercicio 10.2.16. *Demostrar que la función $f : [-1, 0] \cup (1, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2$ es biyectiva y continua. Probar que la función inversa de f no es continua.*

Es interesante notar que la función inversa $g : [0,+\infty) \to [-1,0] \cup (1,+\infty)$ de la función f del ejercicio precedente no resulta continua en $y = 1 = f(-1)$, que es justamente la imagen del punto donde las imágenes por f de los intervalos $[-1,0]$ y $(1,+\infty)$ se "pegan". Esto es básicamente lo que explica la discontinuidad de g. De hecho, si restringimos el dominio de g a la imagen por f del intervalo $[-1,0]$ o a la imagen por f del intervalo $(1,+\infty)$, ésta resulta continua. Esto ilustra un fenómeno general: **la inversa de una función continua definida en un intervalo es continua**.

A fin de demostrar esta afirmación comenzamos con un resultado preliminar: una función continua e inyectiva definida en un intervalo es necesariamente monótona.

Lema 10.2.17. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Entonces f es monótona.*

Demostración. Sean $a,b \in I$ con $a < b$ y supongamos que $f(a) < f(b)$. Afirmamos que f es creciente en $[a,b]$. Si no fuera así, existirían $c,d \in [a,b]$ con $c < d$ tales que $f(c) > f(d)$. Tenemos entonces dos posibilidades: $f(a) < f(d)$ o $f(d) < f(a)$. En el primer caso tenemos que $f(a) < f(d) < f(c)$ de donde, por el Teorema de los valores intermedios (Teorema 8.1.7) concluimos que existe $\alpha \in (a,c)$ tal que $f(\alpha) = f(d)$, lo cual implica que f no es inyectiva. En el segundo caso resulta $f(d) < f(a) < f(b)$, de lo cual, por el Teorema de los valores intermedios (Teorema 8.1.7), deducimos que existe $\beta \in (d,b)$ tal que $f(\beta) = f(a)$. Esto prueba que f no es inyectiva. En definitiva, la función f es creciente en $[a,b]$ y, dado que $[a,b]$ es un intervalo arbitrario contenido en I, resulta entonces f creciente en I.

La demostración en el caso $f(a) > f(b)$ es similar. □

De este resultado deducimos fácilmente la continuidad de la función inversa de una función $f : I \to f(I)$ continua e inyectiva definida en un intervalo. En efecto, el Lema 10.2.17 asegura que f es monótona. Supongamos para fijar ideas que f es creciente y sean $a,b \in I$ con $a < b$. Entonces, por las versiones topológicas del Teorema de Bolzano (Teorema 8.1.8) y Weierstrass (Teorema 8.2.21), concluimos que $f\big([a,b]\big)$ es un intervalo compacto, que, por la monotonía de f, debe ser necesariamente el intervalo $[f(a),f(b)]$. Asimismo, $f\big((a,b)\big) = f\big([a,b]\big) \setminus \{f(a),f(b)\} = \big(f(a),f(b)\big)$. Más generalmente, si J es un conjunto abierto en I, entonces J es una unión de intervalos abiertos del tipo (a_j,b_j) (excepto eventualmente en la frontera de I), y en consecuencia $f(J)$ es una unión de intervalos $\big(f(a_j),f(b_j)\big)$, por lo que, en particular, resulta un conjunto abierto.

Vemos entonces que $f(J)$ es un conjunto abierto para cada conjunto abierto J en I, y por lo tanto, si denominamos $g : f(I) \to I$ a la función inversa de f, entonces $g\ ^{1}(J)$ es un conjunto abierto para cada subconjunto abierto J de $f(I)$. Así, la caracterización topológica de la continuidad en términos de conjuntos abiertos (Teorema 10.2.10) asegura que g es una función continua. En conclusión, hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 10.2.18 (Inversa de una función continua en un intervalo)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Entonces la función inversa $g : f(I) \to I$ es continua.*

La función logarítmica

En la Sección 9.1.1 estudiamos la exponencial real de base a, esto es, la función $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ definida por $f_a(x) := a^x$, siendo $a > 0$ un número real fijo. Hemos visto que f_a es una función continua (Lema 9.1.14), monótona (Lema 9.1.11) y biyectiva (Ejercicio 9.1.15). Entonces el Teorema 10.2.18 asegura que la función inversa $g_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ es una función continua, que denominamos la **función logarítmica de base** a y notamos como habitualmente por $\log_a$.

Las propiedades usuales de la función logarítmica de base a son una consecuencia inmediata de las correspondientes propiedades de la función exponencial de base a.

Ejercicio 10.2.19. *Sea $a > 0$. Demostrar las siguientes afirmaciones:*

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ *para cada* $x, y > 0$.
2. $\log_a(b^x) = x\log_a(b)$ *para cada* $b > 0$ *y cada* $x \in \mathbb{R}$.
3. $\log_a$ *es creciente para* $a > 1$ *y decreciente para* $a < 1$.

Así como las funciones exponenciales de base $a > 1$ crecen más rápidamente que cualquier función polinómica, el comportamiento de las funciones logarítmicas es exactamente el contrario: crecen más lentamente que cualquier función polinómica.

Ejercicio 10.2.20 (“Las logarítmicas crecen más lentamente que las polinómicas”)**.**

1. *Sea $a > 0$. Demostrar que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} x^k/\log_a(x) = \infty$.* (Sugerencia: usar cambios de variable y los resultados de comparación de exponenciales con polinómicas.)
2. *Concluir que si $p \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$, entonces* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{\log_a(x)} = \infty$.

Las funciones trigonométricas inversas

De la definición geométrica de las funciones seno y coseno (Sección 10.1.1) vemos que, si restringimos el dominio y codominio de las mismas, de la manera siguiente:

$$\operatorname{sen} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \quad \cos : [0,\pi] \to [-1,1], \tag{10.13}$$

entonces ambas funciones resultan continuas y biyectivas. Del resultado sobre la inversa de una función continua en un intervalo (Teorema 10.2.18) tenemos que las funciones inversas de seno y coseno, denominadas **arco seno** y **arco coseno** y notadas por arcsen y arccos respectivamente, están bien definidas y resultan continuas en el intervalo $[-1,1]$. Más precisamente, las funciones inversas

$$\operatorname{arcsen} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

de las funciones seno y coseno, con el dominio y el codominio como en (10.13), resultan continuas y biyectivas.

Ejercicio 10.2.21. *Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sean I_k y J_k los intervalos*

$$I_k := \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], \quad J_k := [k\pi, (k+1)\pi]. \tag{10.14}$$

Demostrar que, para cada $k \in \mathbb{Z}$, existen funciones continuas y biyectivas

$$\operatorname{arc\,sen}_k : [-1,1] \to \Big[-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\Big], \quad \operatorname{arc\,cos}_k : [-1,1] \to [k\pi,(k+1)\pi],$$

que resultan las funciones inversas de

$$\operatorname{sen}|_{I_k} : \Big[-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\Big] \to [-1,1], \quad \cos|_{I_k} : [k\pi,(k+1)\pi] \to [-1,1].$$

Cada una de las funciones $\operatorname{arc\,sen}_k$ *y* $\operatorname{arc\,cos}_k$ *se denomina una* **rama** *de la función arco seno y arco coseno.*

Ejercicio 10.2.22 (Arco tangente y arco cotangente)**.** *En este ejercicio consideramos inversas de las funciones tangente y cotangente.*

1. *Sea* $\operatorname{int}(I_0) := (-\pi/2, \pi/2)$ *el interior del intervalo* $I_0 := [-\pi/2, \pi/2]$. *Demostrar que la función* $\operatorname{tg}|_{\operatorname{int}(I_0)} : \operatorname{int}(I_0) \to \mathbb{R}$ *es continua y biyectiva. Concluir que la restricción de la función tangente a* $\operatorname{int}(I_0)$ *posee una inversa continua* $\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to \operatorname{int}(I_0)$.
2. *Más generalmente, si consideramos el interior* $\operatorname{int}(I_k)$ *del intervalo* I_k *de (10.14) para cada* $k \in \mathbb{Z}$, *demostrar que la restricción* $\operatorname{tg}|_{\operatorname{int}(I_k)} : \operatorname{int}(I_k) \to \mathbb{R}$ *de la función tangente resulta continua e inversible, y por lo tanto, existe la función inversa* $\operatorname{arc\,tg}_k : \mathbb{R} \to \operatorname{int}(I_k)$ *(la "rama" de arco tangente en* $\operatorname{int}(I_k)$*), que resulta continua.*
3. *Si consideramos ahora el interior* $\operatorname{int}(J_k)$ *del intervalo* J_k *de (10.14) para cada* $k \in \mathbb{Z}$, *demostrar que la restricción* $\operatorname{cotg}|_{\operatorname{int}(J_k)} : \operatorname{int}(J_k) \to \mathbb{R}$ *de la función cotangente al intervalo abierto* $\operatorname{int}(J_k)$ *resulta continua y biyectiva. Concluir que la correspondiente función inversa* $\operatorname{arc\,cotg}_k : \mathbb{R} \to \operatorname{int}(J_k)$ *(la "rama" de arco cotangente en* $\operatorname{int}(J_k)$*) resulta continua. La función* $\operatorname{arc\,cotg}_0$ *se denomina la función arco cotangente y se nota por* $\operatorname{arc\,cotg}$.

Homeomorfismos

Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos y $f : A \to B$ una función continua e inversible tal que su función inversa $g : B \to A$ es continua. En tal caso, f se denomina un **homeomorfismo**. Asimismo, los conjuntos A y B se denominan **homeomorfos**.

Hasta ahora, hemos usado el adjetivo "topológico" para referirnos informalmente a propiedades que involucran la aplicación de una función continua a un conjunto. Más precisamente, decimos que **una propiedad es topológica si se preserva por aplicación de homeomorfismos**. En el siguiente ejercicio demostramos que la imagen por un homeomorfismo de un subconjunto abierto o cerrado de $\mathbb{R}$ es un subconjunto abierto o cerrado de $\mathbb{R}$, y la imagen por un homeomorfismo de una sucesión convergente es una sucesión convergente. Así, **la cualidad de ser un conjunto abierto o cerrado o una sucesión convergente son propiedades topológicas**.

Ejercicio 10.2.23. *Sea* $f : A \to B$ *una función inversible. Demostrar que:*

1. f *es un homeomorfismo si y solo si* $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión convergente de* B *para cada sucesión convergente* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* A *y* $(f^{-1}(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión convergente de* A *para cada sucesión convergente* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* B.

2. *f es un homeomorfismo si y solo si $f(U)$ es abierto en B para cada subconjunto abierto U de A y $f^{-1}(V)$ es abierto en A para cada subconjunto abierto V de B.*

3. *f es un homeomorfismo si y solo si $f(F)$ es cerrado en B para cada subconjunto cerrado F de A y $f^{-1}(G)$ es cerrado en A para cada subconjunto cerrado G de B.*

(Sugerencia: usar la caracterización topológica de la continuidad (Teorema 10.2.11).)

Otras propiedades topológicas son las de ser conexo y compacto.

Ejercicio 10.2.24. *Sea $f : A \to B$ un homeomorfismo. Demostrar que:*

1. *$f(U) \subset B$ es un conjunto conexo si y solo si $U \subset A$ es conexo.*

2. *$f(K)$ es un subconjunto compacto de B si y solo si K es un compacto en A.*

(Sugerencia: aplicar las versiones topológicas de los Teoremas de Bolzano (Teorema 8.1.8) y Weierstrass (Teorema 8.2.21).)

Por el contrario, la propiedad de ser acotado no es una propiedad topológica.

Ejercicio 10.2.25. *Sea $f : (0,1) \to (1,+\infty)$ la función $f(x) := 1/x$. Demostrar que f es un homeomorfismo (entre un conjunto acotado y uno que no es acotado).*

10.3. Continuidad uniforme

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función que es continua en $\alpha \in A$. La caracterización de la continuidad por límites "continuos" (Teorema 10.1.2) asegura que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$ siempre que $x \in A$ y $|x - \alpha| < \delta$.

Sin embargo, es importante tener en cuenta que esta relación entre la "precisión deseada" ε en la aproximación de $f(\alpha)$ y la "precisión necesaria" δ en la aproximación de α **depende del punto $\alpha \in A$ en consideración**. En consecuencia, a fin de aproximar $f(\alpha)$ es necesario tener información sobre el comportamiento de f en torno a α.

Ejemplo 10.3.1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) := x^2$ y supongamos que se trata de aproximar $f(\alpha)$ a partir de una aproximación x de α. Entonces*

$$|f(x) - f(\alpha)| = |x^2 - \alpha^2| = |x + \alpha||x - \alpha| \sim |2\alpha||x - \alpha|$$

para x "cercano" a α. En consecuencia, si queremos aproximar $f(\alpha)$ con precisión $\varepsilon > 0$, es necesario obtener una aproximación de α del orden de $\varepsilon/2|\alpha|$, es decir, una aproximación que **depende del valor α en consideración**.

Afortunadamente, si el dominio A de f es **compacto** esto no es así.

Teorema 10.3.2. *Sea A un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ continua. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para cada $x, y \in A$ con $|x - y| < \delta$.*

Demostración. Supongamos que no es así. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existen $x_\delta, y_\delta \in A$ que satisfacen las condiciones

$$|x_\delta - y_\delta| < \delta \ \text{ y } \ |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon.$$

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $a_n, b_n \in A$ tales que

$$|a_n - b_n| < 1/n \ \text{ y } \ |f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon.$$

Por la compacidad de A tenemos que existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $\alpha \in A$, tal que la subsucesión $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ también converge a $\beta \in A$. La condición $|a_{n_k} - b_{n_k}| \leq 1/n_k$ implica $\alpha = \beta$. A su vez, la continuidad de f implica que $(f(a_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ y $(f(b_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ convergen a $f(\alpha)$. En consecuencia, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(a_{n_k}) - f(\alpha)| < \varepsilon/2 \ \text{ y } \ |f(b_{n_k}) - f(\alpha)| < \varepsilon/2$$

si $k \geq k_0$. Por lo tanto, $|f(a_{n_k}) - f(b_{n_k})| < \varepsilon$ si $k \geq k_0$, lo que contradice la elección de a_{n_k} y b_{n_k} para $k \geq k_0$. Esto completa la demostración. □

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ continua que satisface la propiedad del enunciado del Teorema 10.3.2 se denomina **uniformemente continua**. Así, el Teorema 10.3.2 asegura que **una función continua definida sobre un conjunto compacto es uniformemente continua**.

Ejemplo 10.3.3. *Consideramos nuevamente la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$. Afirmamos que f no es uniformemente continua. En efecto, dado $\delta > 0$, consideramos el correspondiente "incremento" $|f(x+\delta) - f(x)|$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Observamos que*

$$|f(x+\delta) - f(x)| = |(x+\delta)^2 - x^2| = |2\delta x + \delta^2|,$$

es decir, el incremento **crece en forma lineal** *con x, lo cual nos da la pauta de que la función no puede ser uniformemente continua en $\mathbb{R}$, ya que dicho incremento puede tomar valores arbitrariamente altos si elegimos $x \in \mathbb{R}$ suficientemente grande. Más precisamente, dado $\varepsilon > 0$, afirmamos que no existe $\delta > 0$ de modo tal que $|x - y| < \delta$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Dado que nos interesa el comportamiento del incremento $|f(x) - f(y)|$ para valores "pequeños" de δ, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\delta < 1$, en cuyo caso, si $x > 1$, tenemos que*

$$|f(x+\delta) - f(x)| = \delta|2x + \delta| \geq \delta(2x - \delta) \geq \delta(2x - 1) \geq \delta x.$$

En consecuencia, fijado $\delta > 0$, de la estimación precedente concluimos que existe $x > 1$ tal que $|f(x+\delta) - f(x)| \geq \varepsilon$. Esto prueba que f no es uniformemente continua.

Ejemplo 10.3.4. *Analizamos si la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$ es uniformemente continua, siendo $[a,b]$ un intervalo cerrado arbitrario. Sea $\varepsilon > 0$ y $x, y \in [a,b]$. Entonces*

$$|f(x) - f(y)| = |e^x - e^y| = e^y|e^{x-y} - 1| \leq e^b|e^{x-y} - 1|.$$

Por la continuidad de f (Lema 9.1.14) tenemos que $\lim_{r\to 0} e^r = 1$, y por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal

que si $|r| < \delta$ entonces $|e^r - 1| < \varepsilon$. En consecuencia, si $|x-y| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq e^b |e^{x-y} - 1| \leq e^b \varepsilon,$$

lo que demuestra que f es uniformemente continua.

Ejercicio 10.3.5. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz continua. Demostrar que f es uniformemente continua.*

Ejercicio 10.3.6. *Analizar si las siguientes funciones son uniformemente continuas.*

$$f : (0,1) \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{x^2+1}; \quad g : [1,+\infty) \to \mathbb{R},\ g(x) := \sqrt{x}.$$

Ejercicio 10.3.7 (Continuidad uniforme en términos de sucesiones)**.** *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que f es uniformemente continua si y solo si para cada par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A tales que* $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$ *resulta* $\lim_{n\to\infty}\big(f(a_n) - f(b_n)\big) = 0$.

10.3.1. El módulo de continuidad

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Dado que $[a,b]$ es un conjunto compacto, f es uniformemente continua (Teorema 10.3.2). Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x, y \in [a,b]$ satisfacen la condición $|x-y| \leq \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Esta relación entre los parámetros ε y δ es de suma importancia, dado que nos permite establecer cómo depende la "precisión deseable" de una aproximación $f(x)$ de $f(\alpha)$ de la "calidad de la aproximación" x de α, **independientemente del valor** α considerado.

En esta sección nos proponemos estudiar **cualitativamente** la relación entre los parámetros δ y ε, o más precisamente, analizar de qué forma varía la cantidad

$$\omega(f;\delta) := \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)|, \tag{10.15}$$

en función de δ. Comenzamos observando que, dado que f es acotada (Teorema 8.2.9), el número $\omega(f;\delta)$ está bien definido para cada $\delta \geq 0$, y por lo tanto, (10.15) define una función $\omega(f) : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, que se denomina el **módulo de continuidad** de f.

Ejemplo 10.3.8. *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) := x^2$ y sea $0 \leq \delta \leq 1$. Entonces*

$$\sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)| = \sup_{|x-y|\leq\delta} |x+y||x-y| = \sup_{|x-y|\leq\delta} (2\,\text{máx}\{x,y\} - \delta)\delta \leq (2-\delta)\delta.$$

En consecuencia,

$$\omega(f;\delta) := \sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)| = \sup_{\gamma<\delta} \sup_{|x-y|=\gamma} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{\gamma<\delta} (2-\gamma)\gamma = (2-\delta)\delta.$$

Asimismo, si fijamos $x := 1$ e $y := 1-\delta$, tenemos que

$$\omega(f;\delta) \geq |f(1) - f(1-\delta)| = (2-\delta)\delta.$$

Esto demuestra que $\omega(f;\delta)=\delta(2-\delta)$ para cada $\delta\le 1$. Por otro lado, si $\delta\ge 1$ resulta $\omega(f;\delta)=1$. En conclusión, la función $\omega(f;\delta):[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ está definida por:

$$\omega(f;\delta):=\begin{cases}(2-\delta)\delta & si\ 0\le\delta\le 1,\\ 1 & si\ \delta\ge 1.\end{cases}$$

Ejercicio 10.3.9. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función Lipschitz continua tal que $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$ para cada $x,y\in[a,b]$. Demostrar que $\omega(f;\delta)\le L\delta$ para cada $\delta\ge 0$.*

Ejercicio 10.3.10. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua.*

1. *Demostrar que $\omega(f;\delta)=\max_{|x-y|<\delta}|f(x)-f(y)|$ para cada $\delta\ge 0$.*

2. *Demostrar que $\omega(f)$ es continua en 0.*

3. *Demostrar que $\omega(f)$ es una función creciente y acotada.* (Sugerencia: observar que $\omega(f;b-a)=\omega(f;\delta)$ para cada $\delta\ge b-a$.)

Más generalmente, el módulo de continuidad resulta una función continua.

Lema 10.3.11. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Entonces $\omega(f):[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ es una función continua.*

Demostración. Fijemos $\delta_0>0$ y supongamos que existe una sucesión $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a δ_0 de modo tal que $(\omega(f;\delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $\omega(f;\delta_0)$. Siendo $\omega(f)$ acotada por el Ejercicio 10.3.10, la sucesión $(\omega(f;\delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. El Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 8.2.5) asegura que existe una subsucesión convergente $(\omega(f;\delta_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$, que podemos suponer que no converge a $\omega(f;\delta_0)$. A fin de simplificar notaciones, vamos a suponer que $(\omega(f;\delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un valor distinto de $\omega(f;\delta_0)$.

Por el Ejercicio 10.3.10 sabemos que existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\omega(f;\delta_n)=|f(x_n)-f(y_n)|$$

para cada $n\in\mathbb{N}$. Dado que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión del conjunto compacto $[a,b]$, tenemos que existe una subsucesión convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. A su vez, dado que $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión de $[a,b]$, concluimos que existe una subsucesión convergente $(y_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$. Notamos por $(x_j^*)_{j\in\mathbb{N}}$, $(y_j^*)_{j\in\mathbb{N}}$ y $(\delta_j^*)_{j\in\mathbb{N}}$ las sucesiones $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$, $(y_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ y $(\delta_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ respectivamente, y notamos por x^* e y^* a los límites de $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ e $(y_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$. Dado que $(\delta_j^*)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a δ_0, tenemos que $|x^*-y^*|=\delta_0$. Por lo tanto,

$$\lim_{j\to\infty}\omega(f;\delta_j^*)=\lim_{j\to\infty}|f(x_j^*)-f(y_j^*)|=|f(x^*)-f(y^*)|\le\omega(f;\delta_0). \tag{10.16}$$

Por otro lado, si $\omega(f;\delta_0)=|f(x_0)-f(y_0)|$, podemos elegir sucesiones $(\widehat{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(\widehat{y}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ que convergen a x_0 e y_0 respectivamente, tales que $|f(\widehat{x}_j)-f(\widehat{y}_j)|\le\delta_j^*$. Así,

$$\omega(f;\delta_0)=|f(x_0)-f(y_0)|=\lim_{j\to\infty}|f(\widehat{x}_j)-f(\widehat{y}_j)|\le\lim_{j\to\infty}\omega(f;\delta_j^*). \tag{10.17}$$

Dado que $\text{lím}_{n\to\infty} \omega(f;\delta_n) = \text{lím}_{j\to\infty} \omega(f;\delta_j^*)$, combinando (10.16) y (10.17) concluimos que $\text{lím}_{n\to\infty} \omega(f;\delta_n) = \omega(f;\delta_0)$, lo que contradice la hipótesis sobre $(\omega(f;\delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$. □

Ejercicio 10.3.12. *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *una función continua.*

1. *Demostrar que* $\sup\{\omega(f;\delta) : 0\leq\delta\leq b-a\} = \sup\{\omega(f;\delta) : 0\leq\delta\}$.

2. *Demostrar que* $\sup\{\omega(f;\delta) : 0\leq\delta\} = \text{máx}\{\omega(f;\delta) : 0\leq\delta\}$. *Este máximo, que notamos por* $\omega(f,[a,b])$, *se denomina la* **oscilación** *de* f *en* $[a,b]$.

3. *Demostrar que* $\omega(f)$ *es uniformemente continua.*

El módulo de continuidad y la oscilación nos permiten "medir" cuánto varía una función uniformemente continua, y en tal sentido, los errores que aparecen cuando se trata de operar con funciones continuas, por ejemplo, a efectos de integrarlas (ver la caracterización de la integral definida de la Sección 14.1.2), se expresan en términos de dichas cantidades.

11. Aproximaciones lineales: la noción de diferenciabilidad

Retomando una vez más la resolución de la ecuación $x^2 = 2$, recordamos que en la Sección 2.2 hemos discutido el método de Newton para aproximar la solución positiva de dicha ecuación. Como hemos dicho, el método de Newton se basa en una estrategia de **"linealización"**: dado que es fácil hallar ceros de funciones lineales, **reemplazamos la función en consideración**, en este caso la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 - 2$, **por una función lineal adecuada**. Por supuesto, esta estrategia nos plantea un problema: el de determinar dicha función lineal. Éste es el objetivo central del presente capítulo.

Planteamos la cuestión en términos generales. Supongamos que tenemos una función continua $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y un punto $\alpha \in (a,b)$ de modo tal que conocemos efectivamente el valor de $f(\alpha)$. Se trata entonces de determinar una función lineal que aproxima "bien" a f para valores de (a,b) "cercanos" a α.

Una primera observación que podemos hacer es que, dado que conocemos el valor que toma f en α, una condición natural que debería satisfacer una función lineal ℓ que aproxima bien a f cerca de α es que ℓ tome el mismo valor que f en α, esto es, $f(\alpha)$. Así, las funciones lineales $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que vamos a considerar son de la forma

$$\ell(x) := f(\alpha) + m(x - \alpha), \tag{11.1}$$

donde $m \in \mathbb{R}$ es una constante a determinar. Por supuesto, dependiendo de la constante m, la aproximación correspondiente puede ser bastante mala en cuanto el valor x se "aleja" de α, como se ilustra en la Figura 11.1. Intuitivamente, la aproximación ℓ de f resultará mejor cuando el gráfico de ℓ resulte "tangente" al de f en $x = \alpha$, en tanto que resultará peor cuando el gráfico de ℓ corte al de f de manera "transversal".

11.1. La noción de diferenciabilidad

Analizamos con cuidado lo que estamos diciendo. Supongamos que x es un punto de (a,b) "cercano" a α y $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una aproximación de f del tipo de las de (11.1). Tenemos entonces que

$$f(x) - \ell(x) = f(x) - f(\alpha) - m(x - \alpha). \tag{11.2}$$

En consecuencia, se trata de hallar m de forma tal que el término de la derecha en (11.2) resulte lo más chico posible en valor absoluto para valores de x cercanos a α.

Ejemplo 11.1.1. *Supongamos que la función en consideración es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 - 2$, que*

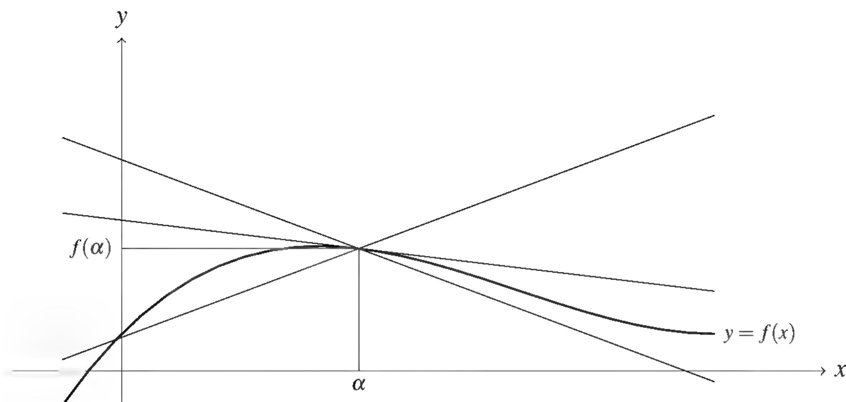


Figura 11.1.: El gráfico $y = f(x)$ de una función f comparado con el de tres funciones lineales del tipo de (11.1).

analizamos en un entorno de $\alpha := 3/2$*. Dado que solo nos interesan los valores de x cercanos a* α*, podemos expresar estos valores en la forma*

$$x = \alpha + \Delta x := 3/2 + \Delta x,$$

donde $\Delta x := x - 3/2$*. Así, tenemos que*

$$\begin{aligned} f(x) - \ell(x) &= f(3/2 + \Delta x) - f(3/2) - m(x - 3/2) \\ &= (3/2 + \Delta x)^2 - 9/4 - m\Delta x \\ &= 3\Delta x + (\Delta x)^2 - m\Delta x = (3 - m)\Delta x + (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Para valores de x cercanos a $3/2$ *tenemos que* Δx *está cerca de 0, y por lo tanto,* $(\Delta x)^2$ *es "mucho menor" que* Δx*. En consecuencia, el mejor valor posible para la constante m es* $m = 3$*, dado que en tal caso* $f(x) - \ell(x) = (\Delta x)^2$*.*

Teniendo en cuenta el ejemplo precedente, nos preguntamos, dada una función f y un número real α en el dominio de f, **cuál es el mejor valor posible para la constante** m en (11.1) si el intervalo en torno a α en que la consideramos se "achica". Para esto, observamos que se trata de hallar m en (11.1) de forma tal que la expresión

$$|f(x) - f(\alpha) - m(x - \alpha)|$$

sea lo más chica posible "cerca" de α. Dado que consideramos la situación "cerca" de α, **estamos hablando de lo que ocurre cuando** x **tiende a** α. Asimismo, si

$$f(x) - f(\alpha) - m(x - \alpha) \approx \varepsilon(x - \alpha),$$

entonces $m + \varepsilon$ es una mejor constante que m en (11.1), y por lo tanto, m **no es la constante óptima que estamos buscando**. En consecuencia, si m es la constante óptima en (11.1), la expresión

$|f(x) - f(\alpha) - m(x-\alpha)|$ debe ser **significativamente menor que cualquier expresión del tipo** $\varepsilon|x-\alpha|$ para x suficientemente cerca de α. Más precisamente, para cada $\varepsilon > 0$ debe existir $\delta > 0$ de modo que se satisfaga la desigualdad

$$|f(x) - f(\alpha) - m(x-\alpha)| \leq \varepsilon|x-\alpha|$$

para cada x tal que $|x-\alpha| < \delta$. Si no consideramos el caso $x = \alpha$, tenemos entonces que para cada $\varepsilon > 0$ debe existir $\delta > 0$ tal que

$$\frac{|f(x) - f(\alpha) - m(x-\alpha)|}{|x-\alpha|} \leq \varepsilon$$

para cada x con $0 < |x-\alpha| < \delta$. Esto nos conduce a la siguiente definición.

Definición 11.1.2 (Diferenciabilidad)**.** *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función y $\alpha \in (a,b)$. Diremos que f es* **diferenciable** *en α si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{x\to\alpha} \left| \frac{f(x) - f(\alpha) - m(x-\alpha)}{x-\alpha} \right| = 0.$$

Si f es **diferenciable** *en cada $\alpha \in (a,b)$, diremos que f es* **diferenciable (a secas)***.*

Ejemplo 11.1.3. *Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 + x - 3$ en $\alpha := 2$. Queremos aproximar la diferencia $f(x) - f(2)$ por una función lineal adecuada para x cercano a 2. Dado que x está "cerca" de 2, podemos expresarlo en la forma $x = 2 + \delta$, siendo δ "pequeño" en valor absoluto. Así,*

$$f(2+\delta) - f(2) = (2+\delta)^3 + (2+\delta) - 3 - 7 = 13\delta + 6\delta^2 + \delta^3.$$

Teniendo en cuenta que δ es "pequeño" en valor absoluto concluimos que los términos $6\delta^2$ y δ^3 son "mucho menores" que 13δ, y por lo tanto, la diferencia $f(2+\delta) - f(2)$ se aproxima bien por 13δ, que es, de hecho, una función lineal en δ. Más precisamente,

$$\frac{f(2+\delta) - f(2) - 13\delta}{\delta} = 6\delta + \delta^2 \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$$

Dado que $x = 2+\delta$, si reemplazamos δ por $x-2$ en la expresión anterior concluimos que $f(x) - f(2)$ se aproxima "bien" por la función lineal $13(x-2)$, es decir,

$$\lim_{x\to 2} \left| \frac{f(x) - f(2) - 13(x-2)}{x-2} \right| = 0.$$

Ejercicio 11.1.4. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$.*

1. *Probar que $\lim_{x\to 2} |f(x) - f(2) - 6(x-2)| = 0$, pero $\lim_{x\to 2} \frac{|f(x)-f(2)-6(x-2)|}{|x-2|} \neq 0$.*

2. *Demostrar que $|f(x) - f(2) - 4(x-2)| = |x-2|^2$.*

3. *Meditar sobre la frase "el mejor valor posible para la constante m".*

Ejercicio 11.1.5. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función lineal. Demostrar que f es diferenciable.*

Ejercicio 11.1.6. *Sea $a > 0$ y $f : (-a,a) \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface la condición $\lim_{x\to 0} f(x)/x^3 = -1$. Mostrar que f es diferenciable en $x = 0$.*

Una observación importante es que, si tal constante m existe, entonces está **unívocamente determinada** por f y α.

Lema 11.1.7. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función y sea $\alpha \in (a,b)$. Si $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ satisfacen la condición*

$$\lim_{x\to\alpha} \left| \frac{f(x) - f(\alpha) - m_i(x-\alpha)}{x-\alpha} \right| = 0$$

para $i = 1,2$, entonces $m_1 = m_2$.

Demostración. A fin de demostrar que $m_1 = m_2$, vamos a ver que $|m_1 - m_2| < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. La idea es simple: dado que las funciones lineales $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_i(x) := f(\alpha) + m_i(x-\alpha)$ $(i = 1,2)$ aproximan bien al gráfico de f cerca de α, ambas tienen que resultar "cercanas" entre sí, y por lo tanto, dado que coinciden en $x = \alpha$, sus pendientes, m_1 y m_2, deben resultar cercanas entre sí.

Vamos a precisar este argumento. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que

$$\frac{|f(x) - f(\alpha) - m_i(x-\alpha)|}{|x-\alpha|} < \varepsilon$$

para $i = 1,2$ y $0 < |x-\alpha| < \delta$. Observamos que la diferencia entre $g_1(x)$ y $g_2(x)$ tiende a 0 más rápidamente que $|x-\alpha|$ cuando x tiende a α, es decir, para $0 < |x-\alpha| < \delta$ tenemos

$$\frac{|g_1(x) - g_2(x)|}{|x-\alpha|} \leq \frac{|g_1(x) - f(x)|}{|x-\alpha|} + \frac{|f(x) - g_2(x)|}{|x-\alpha|} < 2\varepsilon.$$

Ahora bien, el cociente $|g_1(x) - g_2(x)|/|x-\alpha|$ es precisamente la diferencia de las pendientes m_1 y m_2, ya que

$$\frac{|g_1(x) - g_2(x)|}{|x-\alpha|} = \frac{|m_1(x-\alpha) - m_2(x-\alpha)|}{|x-\alpha|} = |m_1 - m_2|.$$

En consecuencia, resulta $|m_1 - m_2| < 2\varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$. Dado que la diferencia $|m_1 - m_2|$ no depende de ε, podemos hacer tender ε a 0 y concluir que $|m_1 - m_2| = 0$. □

Dado que la constante m en la definición de diferenciabilidad (Definición 11.1.2) está unívocamente determinada por f y α, vamos a referirnos a m con una notación que hace referencia a la función f y el elemento α en consideración: **notamos a m por** $f'(\alpha)$.

11.1.1. Derivabilidad

Esta noción de diferenciabilidad de una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ en $\alpha \in (a,b)$, es decir, la existencia **de una función lineal que aproxima bien** a f en torno a α tiene sin embargo un inconveniente: no es "operativa". A fin de obtener una definición más operativa, observamos que, para

cada $x \in (a,b)$ distinto de α, tenemos que

$$\frac{f(x)-f(\alpha)-m(x-\alpha)}{x-\alpha} = \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} - m.$$

En consecuencia,

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)-m(x-\alpha)}{x-\alpha} = 0 \text{ si y solo si } \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = m.$$

Esta identidad nos provee una caracterización "más operativa" de la diferenciabilidad, como enunciamos en el siguiente resultado.

Teorema 11.1.8 (Derivabilidad). *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in (a,b)$. Entonces f es diferenciable en α si y solo si existe*

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}. \tag{11.3}$$

Más aún, en este caso tenemos que dicho límite coincide con $f'(\alpha)$.

Si el límite (11.3) existe para una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in (a,b)$, diremos como habitualmente que f **es derivable en** α. En estos términos, el Teorema 11.1.8 asegura que **la derivabilidad y la diferenciabilidad son conceptos equivalentes en funciones de una variable** (no ocurre lo mismo con funciones de varias variables).

Ejemplo 11.1.9 (Derivada de la función exponencial). *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función exponencial $f(x) := e^x$. Afirmamos que f es derivable en α para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Comenzamos estudiando la derivada de f en $x = 0$, es decir, se trata de determinar si existe el límite $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x$. *Afirmamos que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Para esto, recordamos que $e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$ (Ejercicio 10.1.30). Dado que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n},$$

tenemos que

$$\frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1\right) = 1 + \binom{n}{2}\frac{x}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{x^{n-1}}{n^n}.$$

Como $\binom{n}{k}n^{-k} < 1$ para $2 \le k \le n$, vemos que, si $x > 0$, entonces

$$1 \le \frac{1}{x}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1\right) \le 1 + x + x^2 + \cdots + x^n < \frac{1}{1-x}.$$

Si tomamos límite en las desigualdades anterior cuando n tiende a ∞, concluimos que

$$1 \le \frac{1}{x}(e^x - 1) \le \frac{1}{1-x}. \tag{11.4}$$

Por otro lado, dividiendo cada término de (11.4) por e^x deducimos fácilmente las siguientes desigualdades, válidas para cada $x < 0$:

$$e^x \leq \frac{1}{x}(e^x - 1) \leq \frac{e^x}{1+x}. \tag{11.5}$$

De (11.4) y (11.5) concluimos que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(e^x - 1) = 1$, *es decir, que f es derivable en $x = 0$ y su derivada es $f'(0) = 1$.*

Más generalmente, para $x = \alpha$, tenemos que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{e^x - e^\alpha}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} e^\alpha \cdot \frac{e^{x-\alpha} - 1}{x-\alpha} = e^\alpha.$$

Así, vemos que $f'(\alpha) = e^\alpha$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 11.1.10. *Sea $a > 0$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := a^x$. Demostrar que f es derivable en cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f'(\alpha) = a^\alpha \ln(a)$.* (Sugerencia: utilizar la identidad $a^x = e^{x\ln(a)}$.)

Ejemplo 11.1.11 (Derivada de la función seno)**.** *El siguiente ejemplo es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{sen} x$.*

Comenzamos analizando la derivabilidad de f en $x = 0$, esto es, la existencia de $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x/x$. *Supongamos que $x \in (0, \pi/2)$. Entonces, de acuerdo con la Figura 11.2, tenemos las estimaciones:*

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x. \tag{11.6}$$

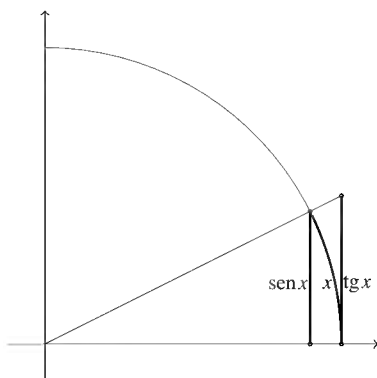


Figura 11.2.: Una demostración gráfica de (11.6) para $0 \leq x \leq \pi/2$.

Si dividimos los tres términos de las desigualdades precedentes por $\operatorname{sen} x$ *e invertimos los términos resultantes, vemos que*

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1.$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ para $x, y \in [0, \pi/2]$ (ver (10.9)),

concluimos que

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right| \leq |\cos x - 1| \leq |x|. \tag{11.7}$$

Por otro lado, si $x \in (-\pi/2, 0)$*, entonces* $\operatorname{sen}(-x)/(-x) = \operatorname{sen} x/x$ *(debido a la imparidad de la función seno) y* $\cos(-x) = \cos x$*, y por lo tanto (11.7) también se satisface en este caso. De (11.7) deducimos fácilmente que*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{11.8}$$

Estudiamos ahora la derivada de f *en* $\alpha \in \mathbb{R}$*, es decir, se trata de estudiar el límite*

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \alpha}{x - \alpha} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \Delta x) - \operatorname{sen} \alpha}{\Delta x}.$$

De acuerdo con la fórmula para el seno de la suma (10.3), tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x + \alpha) - \operatorname{sen} \alpha}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x \cos \alpha + \cos \Delta x \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos \alpha \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} + \operatorname{sen} \alpha \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} \right). \qquad (11.9)
\end{aligned}$$

De (11.8) concluimos que el primer sumando en el último miembro de las identidades precedentes tiende a $\cos \alpha$ *cuando* Δx *tiende a 0. Asimismo, dado que, para* $\Delta x \neq k\pi$*,*

$$\cos \Delta x - 1 = \frac{\cos^2 \Delta x - 1}{\cos \Delta x + 1} = \frac{-\operatorname{sen}^2 \Delta x}{\cos \Delta x + 1},$$

concluimos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 \Delta x}{\Delta x(\cos \Delta x + 1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} \Delta x}{\cos \Delta x + 1} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = 0. \tag{11.10}$$

En consecuencia, combinando (11.9) y (11.10) deducimos que

$$f'(\alpha) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x + \alpha) - \operatorname{sen} \alpha}{\Delta x} = \cos \alpha.$$

Ejercicio 11.1.12. *Demostrar que la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) := \cos x$ *es derivable en cada* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $f'(\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$*.*

Ejercicio 11.1.13 (Continuación del Ejercicio 11.1.6)**.** *Sea* $a > 0$ *y* $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ *una función continua que satisface la condición* $\lim_{x \to 0} f(x)/x^3 = -1$*. Determinar* $f'(0)$*.*

Ejercicio 11.1.14. *Sea* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una función derivable en* $\alpha \in (a, b)$*. Probar que*

$$f'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha - h)}{2h}. \tag{11.11}$$

Exhibir un ejemplo que muestre que la existencia de $f'(\alpha)$ *es necesaria para poder concluir la validez de la identidad (11.11).*

Ejercicio 11.1.15 (Derivabilidad por sucesiones). *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable en un punto $\alpha \in (a,b)$ y sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de (a,b) que convergen a α tales que $a_n \leq \alpha \leq b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Demostrar que*

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = \frac{b_n-\alpha}{b_n-a_n}\cdot\frac{f(b_n)-f(\alpha)}{b_n-\alpha} + \left(1-\frac{b_n-\alpha}{b_n-a_n}\right)\frac{f(a_n)-f(\alpha)}{a_n-\alpha}.$$

2. *Sean $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de $\mathbb{R}$ que convergen a $\alpha \in \mathbb{R}$, y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{R}$ tal que $0 \leq \lambda_n \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que la sucesión $(\lambda_n c_n + (1-\lambda_n)d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α.*

3. *Demostrar que* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = f'(\alpha)$.

11.1.2. Diferenciabilidad y continuidad

Un caso en el que el incremento de una función continua se "controla" de forma lineal es el de una función Lispchitz continua de constante L, esto es, una función f tal que

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \qquad (11.12)$$

para puntos x e y arbitrarios del dominio de f. Si una función diferenciable se aproxima "bien" localmente por una función lineal, entonces es de esperar que resulte localmente Lipschitz continua. El siguiente resultado explica en qué sentido esto es así.

Lema 11.1.16 (Continuidad Lipschitz local). *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\alpha \in (a,b)$. Si $L > |f'(\alpha)|$, entonces existe $\delta > 0$ tal que, para $|x-\alpha| < \delta$, resulta*

$$|f(x)-f(\alpha)| \leq L|x-\alpha|.$$

Demostración. Dado que $L > |f'(\alpha)|$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $L > |f'(\alpha)| + \varepsilon$. A su vez, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)-f(\alpha)-f'(\alpha)(x-\alpha)| \leq \varepsilon|x-\alpha|$$

si $|x-\alpha| < \delta$. En consecuencia,

$$|f(x)-f(\alpha)| \leq |f'(\alpha)|\,|x-\alpha| + \varepsilon|x-\alpha| \leq L|x-\alpha|$$

para $|x-\alpha| < \delta$. Esto concluye la demostración. □

Es fácil ver la optimalidad de $|f'(\alpha)|$: si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función $f(x) := mx$, entonces $f'(\alpha) = m$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y

$$|f(x)-f(\alpha)| = |m|\,|x-\alpha|, \qquad (11.13)$$

lo que demuestra que no es posible elegir constantes L menores que $|f'(\alpha)|$ para estimar la diferencia $|f(x)-f(\alpha)|$ en términos de $|x-\alpha|$ en (11.13), y por lo tanto, muestra que $L > |f'(\alpha)|$ en el Lema 11.1.16 es "óptimo".

Una consecuencia inmediata de este resultado es que una función diferenciable es **localmente** continua.

Corolario 11.1.17. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in (a,b)$ tal que f es diferenciable en α. Entonces f es continua en α.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad Lipschitz de f existen $L > 0$ y $\delta > 0$ tales que $|f(x) - f(\alpha)| \leq L|x-\alpha|$ si $|x-\alpha| < \delta$. Entonces, eligiendo $\delta < \varepsilon/L$, resulta $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$ para $|x-\alpha| < \delta$, como queríamos demostrar. □

11.2. Reglas de derivación

Hemos dicho que la caracterización de la diferenciación mediante la derivada es más "operativa". El objetivo de esta sección es exhibir algunos resultados que permiten "operar" con derivadas. Comenzamos con el comportamiento de la derivación en presencia de operaciones aritméticas.

Proposición 11.2.1 (Operaciones aritméticas con funciones derivables)**.** *Sean $f,g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en $\alpha \in (a,b)$. Entonces:*

1. *$f+g$ es diferenciable en α y $(f+g)'(\alpha) = f'(\alpha) + g'(\alpha)$;*
2. *$f \cdot g$ es diferenciable en α y $(f \cdot g)'(\alpha) = f'(\alpha) \cdot g(\alpha) + f(\alpha) \cdot g'(\alpha)$;*
3. *si $g(\alpha) \neq 0$, entonces f/g es diferenciable en α y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\alpha) = \frac{f'(\alpha) \cdot g(\alpha) - f(\alpha) \cdot g'(\alpha)}{g(\alpha)^2}.$$

Demostración. La primera afirmación es una consecuencia inmediata de las propiedades aritméticas de los límites continuos (Ejercicio 10.1.12). En cuanto a la segunda afirmación, vemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)g(x) - f(\alpha)g(\alpha)}{x-\alpha} &= \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)g(x) - f(\alpha)g(x) + f(\alpha)g(x) - f(\alpha)g(\alpha)}{x-\alpha} \\
&= \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha} \cdot g(x) + f(\alpha) \cdot \frac{g(x) - g(\alpha)}{x-\alpha} \\
&= f'(\alpha) \cdot g(\alpha) + f(\alpha) \cdot g'(\alpha).
\end{aligned}$$

Por último, para demostrar la tercera afirmación bastará ver que $1/g$ es diferenciable en α y $(1/g)'(\alpha) = -g'(\alpha)/g(\alpha)^2$, y combinar esta identidad con la segunda afirmación. Para esto, tenemos que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{1/g(x) - 1/g(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{1}{g(x)g(\alpha)} \cdot \frac{g(\alpha) - g(x)}{x-\alpha} = -\frac{1}{g(\alpha)^2} \cdot g'(\alpha).$$

Esto completa la demostración. □

Dado que la función identidad $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$, es derivable (Ejercicio 11.1.5), de la proposición precedente concluimos que las funciones polinomiales son derivables, y las funciones racionales son derivables en cualquier punto de su dominio.

Ejercicio 11.2.2. *Demostrar que las funciones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante son derivables en cada punto de sus dominios. Demostrar que*

$$(\mathrm{tg})'(\alpha)=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}=1+\mathrm{tg}^2(\alpha),\quad (\mathrm{cotg})'(\alpha)=\frac{-1}{\mathrm{sen}^2(\alpha)}=-1-\mathrm{cotg}^2(\alpha),$$
$$(\sec)'(\alpha)=\frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\sec(\alpha)\,\mathrm{tg}(\alpha),\ (\mathrm{cosec})'(\alpha)=\frac{-\cos(\alpha)}{\mathrm{sen}^2(\alpha)}=-\mathrm{cosec}(\alpha)\,\mathrm{cotg}(\alpha).$$

11.2.1. Derivada de una composición de funciones

Nuestro siguiente resultado tiene que ver con una situación sumamente frecuente en la práctica: la derivación en presencia de composición de funciones. La idea es simple: dadas dos funciones diferenciables $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ tales que la composición $g\circ f:(a,b)\to\mathbb{R}$ está bien definida, si consideramos el cociente incremental de $g\circ f$ en $\alpha\in(a,b)$, tenemos que

$$\frac{g\circ f(x)-g\circ f(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{g(f(x))-g(f(\alpha))}{x-\alpha}=\frac{g(f(x))-g(f(\alpha))}{f(x)-f(\alpha)}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha},\tag{11.14}$$

siempre que $f(x)\neq f(\alpha)$. Así, si $f(x)\neq f(\alpha)$ para cada x con $0<|x-\alpha|<\delta$, podemos demostrar que el cociente incremental de $g\circ f$ en $x=\alpha$ tiende a $g'(f(\alpha))f'(\alpha)$, dado que, mediante el cambio de variables $y=f(x)$ (Lema 10.1.31), deducimos que

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{g(f(x))-g(f(\alpha))}{f(x)-f(\alpha)}=\lim_{y\to f(\alpha)}\frac{g(y)-g(f(\alpha))}{y-f(\alpha)}=g'(f(\alpha))\ \text{y}\ \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha).$$

Supongamos que existe $\delta>0$ tal que $f(x)\neq f(\alpha)$ para cada $x\in(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ con $x\neq\alpha$. Entonces, tomando límite en ambos miembros de (11.14) cuando x tiende a α, concluimos que

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{g(f(x))-g(f(\alpha))}{f(x)-f(\alpha)}\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=g'(f(\alpha))f'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(\alpha)}{x-\alpha}.$$

Sin embargo, es posible que, para cada $\delta>0$, exista $x_\delta\in(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ tal que $f(x_\delta)=f(\alpha)$, en cuyo caso la identidad (11.14) deja de ser válida y no podemos aplicar el argumento anterior. En tal caso, afirmamos que $f'(\alpha)=0$. En efecto, sea $x_n:=x_{1/n}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α y $f(x_n)=f(\alpha)$ para cada $n\in\mathbb{N}$. En consecuencia, dado que existe el límite del cociente incremental de f en α y es igual a $f'(\alpha)$, la caracterización de los límites continuos mediante sucesiones (Lema 10.1.14) asegura que

$$f'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(\alpha)}{x_n-\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{x_n-\alpha}=0.$$

Estudiamos ahora la existencia del límite del cociente incremental de $g \circ f$ en α en este caso. Tenemos que

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(\alpha)}{x - \alpha} = \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(f(\alpha))}{f(x) - f(\alpha)} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} & \text{si } f(x) \neq f(\alpha), \\ 0 & \text{si } f(x) = f(\alpha). \end{cases}$$

Dado que $\lim_{x \to \alpha} (f(x) - f(\alpha))/(x - \alpha) = 0$, si mostramos que la fracción

$$\frac{g(f(x)) - g(f(\alpha))}{f(x) - f(\alpha)} \tag{11.15}$$

está acotada en un entorno de α para los valores de x tales que $f(x) \neq f(\alpha)$, entonces podremos concluir que $(g \circ f)'(\alpha) = 0$. Así, teniendo en cuenta que

$$g'(f(\alpha))f'(\alpha) = g'(f(\alpha)) \cdot 0 = 0,$$

resultará el teorema cierto en este caso.

A fin de ver que (11.15) está acotada en un entorno de α para los valores de x tales que $f(x) \neq f(\alpha)$, observamos que, dado que g es diferenciable en $f(\alpha)$, entonces es localmente Lipschitz continua (Lema 11.1.16), es decir, existen $L > 0$ y $\delta_1 > 0$ tales que

$$\frac{|g(y) - g(f(\alpha))|}{|y - f(\alpha)|} \leq L$$

para $0 < |y - f(\alpha)| < \delta_1$. A su vez, por la continuidad de f en α tenemos que existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - f(\alpha)| < \delta_1$ si $|x - \alpha| < \delta_2$. En consecuencia, si $0 < |x - \alpha| < \delta_2$ y $f(x) \neq f(\alpha)$, el valor absoluto de la fracción de (11.15) resulta acotado por L. En definitiva, hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 11.2.3 (Regla de la cadena). *Sean $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f\big((a,b)\big) \subset (c,d)$. Supongamos que f es diferenciable en $\alpha \in (a,b)$ y g es diferenciable en $f(\alpha)$. Entonces $g \circ f$ es diferenciable en α y*

$$(g \circ f)'(\alpha) = g'(f(\alpha)) \cdot f'(\alpha).$$

Ejemplo 11.2.4. *Sea $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la función $h(x) := e^{-1/x^2}$. Afirmamos que h es diferenciable en cada $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y*

$$h'(\alpha) = \frac{2}{\alpha^3} h(\alpha).$$

En efecto, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ son las funciones $g(x) := e^x$ y $f(x) := -1/x^2$ y $\alpha \neq 0$, entonces f es diferenciable en α y g es diferenciable en $f(\alpha) = -1/\alpha^2$. En consecuencia, dado que $h = g \circ f$, de la regla de la cadena concluimos que

$$h'(\alpha) = g'(f(\alpha)) \cdot f'(\alpha) = e^{f(\alpha)} \frac{2}{\alpha^3} = \frac{2}{\alpha^3} e^{-1/\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^3} h(\alpha),$$

como habíamos afirmado.

Por otro lado, si extendemos el dominio de h definiendo $h(0) := 0$, cabe preguntarse si h es diferenciable en $x = 0$. En tal caso, tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0,$$

ya que "las exponenciales crecen más rápido que las polinómicas" (Ejercicio 10.1.29). Concluimos entonces que h es diferenciable y $h'(0) = 0$, **a pesar de que la función f no es diferenciable en $x = 0$.**

Ejercicio 11.2.5 (Una recíproca parcial de la regla de la cadena)**.** *Sean $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f\big((a,b)\big) \subset (c,d)$. Supongamos que $g\circ f$ es diferenciable en $\alpha \in (a,b)$, g es diferenciable en $f(\alpha)$ y $g'(f(\alpha)) \neq 0$. Demostrar que f es diferenciable en α y $(g\circ f)'(\alpha) = g'(f(\alpha))\cdot f'(\alpha)$.* $\big($Sugerencia: suponer que existe $\delta > 0$ tal que $g\circ f(x) \neq g\circ f(\alpha)$ para cada $x \in (\alpha-\delta, \alpha+\delta)\setminus\{\alpha\}$ y despejar el cociente incremental de f en α de (11.14). En caso de que no exista tal δ, argumentar como en la demostración de la Regla de la cadena.$\big)$

11.2.2. Derivada de la función inversa

Concluimos el presente capítulo caracterizando cuándo la función inversa de una función diferenciable es diferenciable y, en tal caso, exhibiendo una expresión de su derivada.

Corolario 11.2.6 (Teorema de la función inversa)**.** *Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ una función biyectiva y sea $g : (c,d) \to (a,b)$ su inversa. Supongamos que f es diferenciable en un punto $\alpha \in (a,b)$ y g es continua en $\beta := f(\alpha)$. Entonces g es diferenciable en β si y solo si $f'(\alpha) \neq 0$, y en tal caso $g'(\beta) = 1/f'(\alpha)$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $f'(\alpha) \neq 0$. Como g es continua en β, tenemos que $\lim_{y\to\beta} g(y) = g(\beta)$. Además, $g(y) \neq g(\beta)$ si $y \in (c,d)\setminus\{\beta\}$. Por lo tanto,

$$\lim_{y\to\beta} \frac{g(y)-g(\beta)}{y-\beta} = \lim_{y\to\beta} \frac{g(y)-\alpha}{f(g(y))-f(\alpha)} = \lim_{y\to\beta} \left(\frac{f(g(y))-f(\alpha)}{g(y)-\alpha}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(\alpha)},$$

donde la última identidad se demuestra utilizando un cambio de variables conveniente.

Recíprocamente, si g es diferenciable en β, entonces, dado que $g\circ f = \mathrm{id}_{(a,b)}$, de la Regla de la cadena (Teorema 11.2.3) concluimos que $g'(\beta)f'(\alpha) = 1$, de donde se deduce que $f'(\alpha) \neq 0$. Esto concluye la demostración. □

Ejemplo 11.2.7. *Sea $f : (-1,1) \to (-1,1)$, $f(x) = x^3$. Es claro que f es inversible y diferenciable, estando la función inversa $f^{-1} : (-1,1) \to (-1,1)$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Si $\alpha \in (-1,0)\cup(0,1)$, tenemos que $f'(\alpha) = 3\alpha^2 \neq 0$, por lo que el Teorema de la función inversa (Corolario 11.2.6) nos asegura que f^{-1} es diferenciable en $f(\alpha)$ y*

$$(f^{-1})'(f(\alpha)) = (f^{-1})'(\alpha^3) = \frac{1}{f'(\alpha)} = \frac{1}{3\alpha^2}.$$

En consecuencia, resulta $\left(f^{-1}\right)'(\alpha) = (1/3)\alpha^{-2/3}$ *para cada* $\alpha \in (0,1)$. *Por otro lado, el Teorema de la función inversa nos asegura que* f^{-1} *no es diferenciable en* $\alpha = 0$.

Ejercicio 11.2.8. *Probar que* $\ln : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *es derivable y* $\ln'(x) = 1/x$. *Más generalmente, dado* $a > 0$, *probar que* $\log_a : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *es derivable y* $\log_a'(x) = x^{-1}\log_a e$.

Ejercicio 11.2.9. *Sea* $r \in \mathbb{R}$. *Demostrar que la función* $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^r$ *es derivable y* $f'(x) = rx^{r-1}$. (Sugerencia: utilizar la identidad $x^r = e^{r\ln(x)}$.)

Ejercicio 11.2.10. *Demostrar que* $\operatorname{arc tg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ *y* $\operatorname{arc cotg} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$ *son derivables en cada* $x \in \mathbb{R}$, *siendo* $\operatorname{arc tg}'(x) = 1/(1+x^2)$ *y* $\operatorname{arc cotg}'(x) = -1/(1+x^2)$.

Ejercicio 11.2.11. *Probar que* $\operatorname{arc sen} : (-1,1) \to (-\pi/2, \pi/2)$ *y* $\operatorname{arc cos} : (-1,1) \to (0,\pi)$ *son derivables, siendo* $\operatorname{arc sen}'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ *y* $\operatorname{arc cos}'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$.

12. Estimaciones para funciones diferenciables

Como hemos dicho a lo largo de este texto, los problemas modelo que estamos abordando deben frecuentemente ser resueltos en forma **aproximada**. Así, una cuestión fundamental es la de **estimar** los errores que cometemos en tales aproximaciones. La noción de diferenciabilidad nos provee herramientas para obtener estimaciones. El presente capítulo está consagrado a discutir dos resultados fundamentales en este sentido: el Teorema del valor medio, que permite estimar el incremento de una función diferenciable en términos de la derivada de la misma, y el Teorema de Taylor, que nos provee estimaciones sobre el error que cometemos al aproximar una función n veces diferenciable por el polinomio de grado a lo sumo n que mejor la aproxima, en un sentido a determinar. Estos resultados van a ser esenciales para el capítulo siguiente, en el cual vamos retomar nuestros problemas modelo, cuando éstos están definidos por medio de funciones diferenciables

12.1. Estimaciones globales: Teorema del valor medio

Hemos visto que la diferenciabilidad de una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ en un punto $\alpha\in(a,b)$ implica que f satisface la siguiente condición de continuidad Lipschitz "local" (Lema 11.1.16): dado $L>|f'(\alpha)|$, existe $\delta>0$ tal que si $|x-\alpha|<\delta$, entonces

$$|f(x)-f(\alpha)|\leq L|x-\alpha|.$$

El principal resultado de esta sección asegura que, si $|f'(x)|\leq L$ para cada $x\in(a,b)$, entonces tenemos la **estimación de Lipschitz global**

$$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|$$

para cada $x,y\in[a,b]$. Más aún, el resultado que vamos a demostrar, denominado habitualmente el "Teorema de Cauchy", es más general, en el sentido de que afirma que, si $|f'(x)|\leq g'(x)$ para cada $x\in(a,b)$, entonces

$$|f(x)-f(y)|\leq g(x)-g(y)$$

para cada $x,y\in[a,b]$. El caso anterior se obtiene cuando $g(x)=Lx$.

En su formulación usual, el Teorema del valor medio es un resultado existencial: si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

es una función continua que es derivable en (a,b), existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Así, el propio enunciado del resultado sugiere que la existencia del punto c en sí tiene importancia. Esta idea se refuerza aún más cuando la demostración del Teorema del valor medio se deduce a partir del Teorema de Rolle (Teorema 0.3.4): si $f[a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua que es derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$. La demostración del Teorema de Rolle se basa esencialmente en la observación de que la función f en consideración alcanza un máximo o un mínimo local c en (a,b), en cuyo caso resulta $f'(c) = 0$. En este caso, la existencia del punto c es interesante en sí, dado que f alcanza un extremo en c. A su vez, la existencia de ceros de la derivada es también de importancia, con varias aplicaciones de interés.

En contraposición a esto, el punto c cuya existencia postula el enunciado del Teorema del valor medio es de poco interés en sí. De hecho, los primeros enunciados del Teorema del valor medio, debidos a Lagrange y Cauchy, **no tienen esta forma existencial**, sino la forma de una estimación (ver [Fle74] en relación con el desarrollo histórico del Teorema del valor medio). Asimismo, las aplicaciones más importantes requieren el resultado en la forma de una estimación o usan típicamente la versión existencial del Teorema del valor medio a fin de obtener estimaciones. Por último, debería ser claro que se trata de un resultado **sobre el comportamiento del promedio**. Para reforzar esto, vamos a dar una demostración del mismo que se basa en argumentos sobre "promedios", a fin de recuperar el sentido original del enunciado (sobre el interés de este tipo de demostraciones, cabe mencionar [AD63]).

12.1.1. La "conservación" del promedio

La idea es la siguiente: sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas que son derivables en (a,b), y supongamos que g es estrictamente creciente de $[a,b]$. La base de la demostración del teorema consiste en probar que el promedio "ponderado"

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \tag{12.1}$$

se alcanza en un intervalo de longitud más chica, digamos $(b-a)/3$. Para esto, dividimos el intervalo $[a,b]$ en tres intervalos de la misma longitud, $[a,b] = [a_0,a_1] \cup [a_1,a_2] \cup [a_2,a_3]$, y observamos que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\big(f(a_3)-f(a_2)\big)+\big(f(a_2)-f(a_1)\big)+\big(f(a_1)-f(a_0)\big)}{\big(g(a_3)-g(a_2)\big)+\big(g(a_2)-g(a_1)\big)+\big(g(a_1)-g(a_0)\big)}. \tag{12.2}$$

A fin de establecer una relación entre (12.1) y los correspondientes promedios ponderados en los intervalos $[a_{i-1},a_i]$ $(i = 1,2,3)$, tenemos el siguiente resultado.

Lema 12.1.1. *Sean $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ números reales y $\beta_1,\dots,\beta_n$ números reales positivos. Entonces*

$$\min_{1<i<n} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \le \frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{\beta_1+\cdots+\beta_n} \le \max_{1<i<n} \frac{\alpha_i}{\beta_i},$$

con desigualdades estrictas si existen i, j tales que $\alpha_i/\beta_i < \alpha_j/\beta_j$.

Demostración. Argumentando por inducción en n, observamos que el enunciado es evidente para $n = 1$. Supongamos entonces el enunciado cierto para n y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ y $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ números reales con $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ positivos. Supongamos que la numeración es tal que $\alpha_1/\beta_1 \leq \alpha_2/\beta_2 \leq \cdots \leq \alpha_{n+1}/\beta_{n+1}$. Observamos que

$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1}}{\beta_1 + \cdots + \beta_{n+1}} \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} \tag{12.3}$$

si y solo si

$$\beta_{n+1}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1}) \leq \alpha_{n+1}(\beta_1 + \cdots + \beta_{n+1}),$$

lo cual, cancelando el término $\alpha_{n+1}\beta_{n+1}$ a ambos lados de la desigualdad, equivale a

$$\beta_{n+1}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \leq \alpha_{n+1}(\beta_1 + \cdots + \beta_n),$$

que a su vez es equivalente a

$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\beta_1 + \cdots + \beta_n} \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}.$$

Ahora bien, esta última desigualdad es verdadera dado que, por hipótesis inductiva, el miembro izquierdo de la desigualdad se acota superiormente por α_n/β_n, que es menor o igual que α_{n+1}/β_{n+1}, siendo la desigualdad (12.3) estricta si $\alpha_n/\beta_n < \alpha_{n+1}/\beta_{n+1}$. La demostración de la otra desigualdad es similar. □

Aplicando el Lema 12.1.1 a la identidad (12.2) concluimos que

$$\min_{1 \leq i \leq 3} \frac{f(a_i) - f(a_{i-1})}{g(a_i) - g(a_{i-1})} \leq \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \leq \max_{1 \leq i \leq 3} \frac{f(a_i) - f(a_{i-1})}{g(a_i) - g(a_{i-1})}. \tag{12.4}$$

De esta estimación, válida para toda partición del intervalo $[a, b]$ en un número arbitrario de subintervalos de la misma longitud, Cauchy dedujo, incorrectamente, su enunciado Teorema del valor medio. A fin de "corregir" el argumento de Cauchy, tenemos el siguiente resultado, que expresa que el promedio que nos interesa se alcanza en un intervalo de longitud $(b - a)/3$.

Lema 12.1.2 (Conservación del promedio)**.** *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas que son derivables en (a, b), tales que g es estrictamente creciente de $[a, b]$. Entonces existe un intervalo $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ de longitud $(b - a)/3$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b_1) - f(a_1)}{g(b_1) - g(a_1)}.$$

Demostración. Sea $\Delta := (b - a)/3$ y $h : [a, b - \Delta] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$h(x) := \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{g(x + \Delta) - g(x)}.$$

Dado que h es un cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula, concluimos que es una función continua. Además, en virtud de (12.4) tenemos que $h(a_i) \leq \big(f(b) - f(a)\big)/\big(g(b) -$

$g(a)\big) \leq h(a_j)$ para ciertos $i, j \in \{0,1,2\}$, siendo ambas desigualdades estrictas si existen $k,l \in \{0,1,2\}$ tales que $h(a_k) < h(a_l)$. En este caso, por el Teorema de los valores intermedios (Teorema 8.1.7), existe $c \in (a, b-\Delta)$ tal que

$$h(c) = \frac{f(c+\Delta)-f(c)}{g(c+\Delta)-g(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

como queríamos demostrar. Por otro lado, si $h(a_1) = h(a_2) = h(a_3)$, entonces

$$h(a_1) = h(a_2) = h(a_3) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

y el intervalo $[a_1,a_2] \subset (a,b)$ satisface las condiciones del enunciado. □

Ejemplo 12.1.3. *Para* $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x):=x^2$, *tenemos que* $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=3$. *Se trata de determinar* $a_1, b_1 \in [1,2]$ *tales que* $b_1 - a_1 = 1/3$ *y el incremento promedio de* f *en* $[a_1,b_1]$ *es igual a 3. Dado que la función* f *en consideración es muy simple, podemos determinar* a_1 *explícitamente:*

$$\frac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1} = \frac{b_1^2-a_1^2}{b_1-a_1} = b_1+a_1 = 2a_1+\frac{1}{3}.$$

En consecuencia, debe ser $2a_1+1/3=3$, *de donde concluimos que* $a_1=4/3$, *y por lo tanto,* $b_1=5/3$ *(ver la Figura 12.1).*

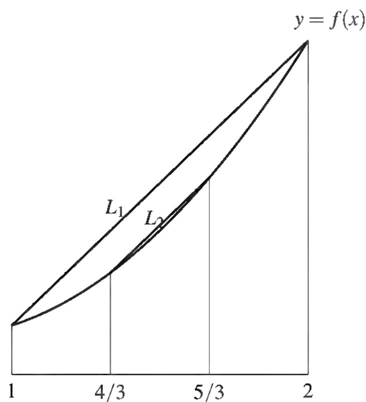


Figura 12.1.: El gráfico de la función $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x):=x^2$, junto con las dos secantes paralelas L_1 y L_2.

12.1.2. El Teorema del valor medio

Este resultado nos permite achicar indefinidamente el intervalo en el cual consideramos el promedio. En el límite, el promedio sobre un intervalo "puntual" resulta el cociente de las derivadas correspondientes, y el enunciado correspondiente es el siguiente.

Teorema 12.1.4 (Teorema del valor medio generalizado). *Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones continuas que son derivables en (a,b). Si $g'(c)>0$ para cada $c\in(a,b)$, entonces existe $c\in(a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demostración. De acuerdo al lema sobre la conservación del promedio (Lema 12.1.2), existe un intervalo $[a_1,b_1]\subset(a,b)$ de longitud $(b-a)/3$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f(b_1)-f(a_1)}{g(b_1)-g(a_1)}.$$

Aplicando sucesivamente este resultado, construimos una sucesión de intervalos cerrados, acotados y encajados $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ cuya longitud tiende a cero tales que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f(b_n)-f(a_n)}{g(b_n)-g(a_n)}.$$

De la completitud de $\mathbb{R}$ concluimos que existe $c\in(a,b)$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]=\{c\}$. Por el Ejercicio sobre la derivación mediante sucesiones (Ejercicio 11.1.15), tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(c)\ \text{ y }\ \lim_{n\to\infty}\frac{g(b_n)-g(a_n)}{b_n-a_n}=g'(c).$$

En consecuencia,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{g(b_n)-g(a_n)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

como queríamos demostrar. □

Ejercicio 12.1.5 (Teorema de Rolle). *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua que es derivable en (a,b). Demostrar que si $f(a)=f(b)$, entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.*

Ejercicio 12.1.6. *Sea $f:(c,+\infty)\to\mathbb{R}$ una función derivable tal que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=a$.*

1. *Demostrar que si existe $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=b$, entonces $b=0$.* (Sugerencia: observar que $f(n+1)-f(n)=f'(a_n)$ con $a_n\in(n,n+1)$.)

2. *Demostrar que el límite $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ puede no existir.* (Sugerencia: analizar la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x):=\operatorname{sen}(x^2)/x$.)

Ejercicio 12.1.7. *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función derivable.*

1. *Demostrar que:*
   - *si $f'(x)\geq 0$ para cada $x\in(a,b)$, entonces f es creciente;*
   - *si $f'(x)\leq 0$ para cada $x\in(a,b)$, entonces f es decreciente;*
   - *si $f'(x)=0$ para cada $x\in(a,b)$, entonces f es constante.*

2. *Demostrar que la siguiente afirmación es falsa: "si $f'(c) > 0$, entonces f es creciente en un entorno de c". Para esto, estudiar la siguiente función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

(Sugerencia: demostrar que existen sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que convergen a 0 tales que $f'(a_n) > 0$ y $f'(b_n) < 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.)

Como hemos señalado, esta versión existencial del Teorema del valor medio nos permite obtener estimaciones. En tal sentido, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 12.1.8 (Teorema del valor medio generalizado – Estimación). *Sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas que son derivables en (a,b). Si $g'(x) > 0$ para cada $x \in (a,b)$, entonces*

$$\inf_{x\in(a,b)} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \leq \sup_{x\in(a,b)} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ejercicio 12.1.9. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface la condición $f'(x) > 1$ para todo $x > 0$. Probar que f es estrictamente creciente y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.*

12.1.3. Aplicación a la demostración de desigualdades

Como hemos dicho, diversos resultados del análisis conciernen el estudio de desigualdades, lo cual transforma el estudio de las mismas en un tema de tal importancia que hay libros enteros dedicados al tema (ver, por ejemplo, [HLP34] o [Mit70]). En particular, dado que el Teorema del valor medio permite establecer estimaciones globales, resulta una herramienta de suma utilidad a fin de establecer desigualdades entre funciones diferenciables, como se aprecia, por ejemplo, en [HLP34, Chapter IV]. El próposito de esta sección es ilustrar este tipo de aplicaciones por medio de algunos ejemplos simples.

Ejemplo 12.1.10. *Afirmamos que para cada $x \in \mathbb{R}$ se satisface la desigualdad*

$$1 + x \leq e^x. \tag{12.5}$$

A fin de demostrar (12.5), la expresamos en términos de las funciones $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$ y $g(x) := x$. De acuerdo con el Teorema del valor medio (Teorema 12.1.4), dado $x \neq 0$, existe c en el intervalo abierto $\operatorname{int}(0,x)$ formado por 0 y x tal que

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = e^c.$$

Supongamos que $x > 0$. Entonces $\operatorname{int}(0,x) = (0,x)$, por lo que $c > 0$. En consecuencia,

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^c \geq 1,$$

de donde deducimos inmediatamente (12.5) para $x > 0$. Por otro lado, si $x < 0$, razonando como antes vemos que $c < 0$, y entonces

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^c \leq 1,$$

de lo cual, dado que $x < 0$, obtenemos (12.5) en este caso.

Ejercicio 12.1.11. *Demostrar que $e^{-x} \leq 1 - x + x^2/2$ para cada $x \geq 0$.*

Ejercicio 12.1.12. *Demostrar que $\ln(1-x) \geq -x - x^2$ para cada $x \in [0, 1/2]$.*

Ejercicio 12.1.13. *Demostrar la* **desigualdad de Napier***: si $0 < x < y$, entonces*

$$\frac{1}{y} < \frac{\ln y - \ln x}{y - x} < \frac{1}{x}.$$

Ejercicio 12.1.14. *Demostrar las siguientes desigualdades:*

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \operatorname{sen} x \leq x \quad (x \geq 0), \qquad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 + \frac{x^2}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ejercicio 12.1.15. *Demostrar que $|\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}| \leq |x - y|$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$.*

Ejercicio 12.1.16 (Desigualdad de Bernoulli)**.** *Demostrar la siguiente generalización de la desigualdad de Bernoulli (Lema 0.2.2): dado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,*

- $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$ *para cada* $\alpha \in (0, 1)$ *y cada* $x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$,
- $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ *para cada* $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ *y cada* $x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$.

12.1.4. La regla de L'Hôpital

El Teorema del valor medio nos provee herramientas para tratar cierto tipo de límites indeterminados, que en su conjunto se denominan la **regla de L'Hôpital**.

Teorema 12.1.17 (Regla de L'Hôpital, caso $0/0$)**.** *Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables y sea $\alpha \in (a, b)$ tal que*

- $g(x) \neq 0$ *y* $g'(x) \neq 0$ *para cada* $x \in (a, b) \setminus \{\alpha\}$;
- $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$;
- $\lim\limits_{x \to \alpha} f'(x)/g'(x) = \ell$.

Entonces $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)/g(x) = \ell$.

Demostración. Sea $x \in (a, b) \setminus \{\alpha\}$. El Teorema del valor medio (Teorema 12.1.4) asegura que existe $c(x)$ en el intervalo abierto $\operatorname{int}(\alpha, x)$ definido por α y x tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Observamos que la función $x \mapsto c(x)$ no necesariamente es continua, por lo que no podemos asegurar directamente que el límite del término de la derecha sea ℓ. Sin embargo, de la definición de límite sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell\right| < \varepsilon$$

para cada $c \in (a,b)$ con $0 < |c-\alpha| < \delta$. De esto concluimos que, para cada $x \in (a,b)$ con $0 < |x-\alpha| < \delta$, resulta

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| < \varepsilon.$$

De aquí deducimos inmediatamente el enunciado del Teorema. □

Ejemplo 12.1.18. *Analizamos la existencia del límite* $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$, *o equivalentemente, dado que* $\ln : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *es un homeomorfismo, la existencia del límite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x).$$

Dado que tanto $\ln(1+x)$ *como x tienden a 0 cuando cuando x tiende a 0, estamos en las condiciones de la regla de L'Hôpital (Teorema 12.1.17). Así, tenemos que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Finalmente, concluimos que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e^1 = e$.

Ejercicio 12.1.19 (Una variante de la regla de L'Hôpital)**.** *Sean* $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *dos funciones derivables y sea* $\alpha \in (a,b)$ *tal que*

- $g(x) \neq 0$ *y* $g'(x) \neq 0$ *para cada* $x \in (\alpha,b) \setminus \{\alpha\}$;
- $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$;
- $\lim_{x\to\alpha^+} f'(x)/g'(x) = \ell$.

Demostrar que $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)/g(x) = \ell$.

Ejercicio 12.1.20 (Otra variante de la regla de L'Hôpital)**.** *Sean* $f, g : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *dos funciones derivables tales que*

- $g(x) \neq 0$ *y* $g'(x) \neq 0$ *para cada* $x \in (a,+\infty)$;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$;
- $\lim_{x\to+\infty} f'(x)/g'(x) = \ell$.

Demostrar que $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = \ell$.

Como puede apreciarse a partir de los ejercicios precedentes, existen numerosas variantes de la regla de L'Hôpital que se deducen fácilmente a partir del caso 0/0 que consideramos en el Teorema 12.1.17. Un caso que requiere una argumentación algo diferente es el denominado "∞/∞", que consideramos a continuación.

Teorema 12.1.21 (Regla de L'Hôpital, versión ∞/∞). *Sean $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que*

- $g(x)\neq 0$ *y* $g'(x)\neq 0$ *para cada* $x\in(a,b)$*;*
- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$*;*
- $\lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x) = \ell$*.*

Entonces $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x) = \ell$*.*

Demostración. Dados $0<\delta<b-a$ y $x\in(a,a+\delta)$, por el Teorema del valor medio (Teorema 12.1.4) tenemos que existe $c(x)\in(x,a+\delta)$ tal que

$$\frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \tag{12.6}$$

Fijemos $0<\varepsilon<1/2$. Dado que $\lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x)=\ell$, de (12.6) vemos que existe $\delta>0$ tal que

$$\left|\frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)}-\ell\right|<\varepsilon$$

para cada $x\in(a,a+\delta)$. Observamos que

$$\frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)} = \frac{f(x)}{g(x)}\left(1-\frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right)\left(1+\frac{g(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)}\right).$$

Dado que $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x)=\infty$, concluimos que existe $\delta_1>0$ tal que

$$1-\varepsilon < \left(1-\frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right)\left(1+\frac{g(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)}\right) < 1+\varepsilon$$

para cada $x\in(a,a+\delta_1)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right| &\le \left(1-\frac{f(a+\delta)}{f(x)}\right)\left(1+\frac{g(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)}\right)\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right| \\ &\le \left|\frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)}-\ell\right| + \varepsilon|\ell| \le \varepsilon(1+|\ell|)\end{aligned}$$

para cada $x\in(a,a+\min\{\delta,\delta_1\})$. Esto demuestra que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right| < 2\varepsilon(1+\ell)$$

para cada $x\in(a,a+\min\{\delta,\delta_1\})$, y por lo tanto, concluye la demostración. □

Ejercicio 12.1.22 (Una variante del caso ∞/∞ de la regla de L'Hôpital). *Sean $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que*

- $g(x)\neq 0$ *y* $g'(x)\neq 0$ *para cada* $x\in(a,b)$*;*
- $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$*;*
- $\lim_{x\to b^-} f'(x)/g'(x) = \ell$*.*

Demostrar que $\lim_{x\to b^-} f(x)/g(x) = \ell$*.*

Otras variantes del caso ∞/∞ de la regla de L'Hôpital incluyen resultados del mismo tipo para $a=-\infty$ o $b=+\infty$.

Ejemplo 12.1.23. *Analizamos la existencia del límite* $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$*, o equivalentemente,*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x.$$

Si $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ son las funciones $f(x):=\ln x$ y $g(x):=x$, entonces f y g satisfacen las hipótesis de la variante del Teorema 12.1.21 con $b=+\infty$, por lo que concluimos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

De esto deducimos que $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}=1$.

12.2. Aproximaciones de orden superior: el polinomio de Taylor

En el capítulo precedente hemos discutido si es posible aproximar "bien" el "incremento" $f(x)-f(\alpha)$ de una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ en un entorno de un punto $\alpha\in(a,b)$ por una función lineal en $x-\alpha$. Esto nos condujo a la noción de diferenciabilidad, junto con la caracterización "operativa" de la diferenciabilidad en términos de derivadas (Teorema 11.1.8).

Sin embargo, hay situaciones en las que esta información no es suficientemente fina. Por ejemplo, supongamos que queremos estudiar los extremos locales de una función diferenciable $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Sabemos que tales extremos son puntos críticos de f, esto es, puntos de (a,b) en los cuales la derivada de f se anula (Corolario 0.3.3). Ahora bien, dado un punto crítico $\alpha\in(a,b)$ de f, se trata de decidir si f alcanza un máximo o un mínimo local en α. Si "linealizamos" la situación en un entorno de α, todo lo que sabemos es que, dado que $f'(\alpha)=0$,

$$f(x)-f(\alpha)\approx f'(\alpha)(x-\alpha)=0.$$

¡Pero esto no nos alcanza para decidir si f alcanza un mínimo o un máximo local en α! Necesitamos más información sobre el comportamiento de f en torno a α. Por ejemplo, si supiéramos que existe $\varepsilon>0$ tal que

- $f'(x) \leq 0$ para cada $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha)$;
- $f'(x) \geq 0$ para cada $x \in (\alpha, \alpha + \varepsilon)$;

entonces concluiríamos que f es decreciente en $(\alpha - \varepsilon, \alpha)$ y creciente en $(\alpha, \alpha + \varepsilon)$ (Ejercicio 12.1.7), y así deduciríamos que f alcanza un mínimo local en α.

Esto sugiere que el análisis del comportamiento de f en torno a un punto crítico α requiere información sobre el comportamiento de f' en un entorno de α. Suponiendo que f es derivable en cada punto de (a,b), **se trata entonces de estudiar la función derivada** $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$. En tal sentido, cabe preguntarse si la función derivada $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ es a su vez diferenciable en un punto $\beta \in (a,b)$. En otras palabras, nos preguntamos si f' puede ser "bien" aproximada en un entorno de β por una función lineal. Como sabemos, esto ocurre si f' es derivable en $\beta \in (a,b)$, en cuyo caso la derivada de f' en β se denomina la **segunda derivada** $f''(\beta)$ de f en β.

A su vez, si f es dos veces derivable (a secas), esto es, si es dos veces derivable en cada $\beta \in (a,b)$, tenemos entonces definida una **función derivada segunda** $f'' : (a,b) \to \mathbb{R}$. Si esta función es derivable, podemos entonces considerar la derivada de dicha función en $\gamma \in (a,b)$, que denominamos **tercera derivada** de f en γ y notamos en la forma $f'''(\gamma)$. Continuando de esta manera, obtenemos derivadas de orden cuarto, quinto y más, que definimos recursivamente por

$$f^{(n)}(\gamma) := (f^{(n-1)})'(\gamma).$$

Nos van a interesar, en particular, las funciones $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ **que son n veces derivables de modo tal que la función derivada n–ésima $f^{(n)} : (a,b) \to \mathbb{R}$ resulte continua**. A esta clase de funciones la notamos $C^n(a,b)$, o simplemente C^n, cuando el dominio de las funciones en consideración resulte claro del contexto. Asimismo, escribimos $C^0(a,b)$, o simplemente C^0, para representar el conjunto de las funciones $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continuas. Dado que una función derivable es continua (Corolario 11.1.17), vemos que

$$C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \cdots \supset C^n \supset C^{n+1} \supset \cdots$$

Una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ de clase C^n para cada $n \geq 0$ se dice que es de clase C^∞.

Ejemplo 12.2.1. *Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$. Hemos visto que $f'(\alpha) = e^\alpha$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ (Ejemplo 11.1.9). En consecuencia, la función derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ resulta definida por $f'(x) = e^x$. Esto a su vez implica que la función derivada f' resulta derivable con derivada $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f''(x) = e^x$. Así sucesivamente concluimos que f posee derivadas en $\mathbb{R}$ de todos los órdenes, siendo $f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por*

$$f^{(n)}(x) = e^x.$$

En particular, f es una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 12.2.2. *Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{sen} x$. En el Ejemplo 11.1.11 hemos visto que $f'(\alpha) = \cos\alpha$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. En consecuencia, tenemos definida la función derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f'(x) := \cos x$. Esta función a su vez resulta derivable en cada $\alpha \in \mathbb{R}$, siendo $f''(\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ (Ejercicio 11.1.12). De aquí deducimos que la función derivada segunda f'' :*

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *resulta definida por* $f''(x) := -\operatorname{sen} x$. *Continuando de este modo, concluimos que* f *es de clase* C^∞ *en* $\mathbb{R}$ *y la función* $f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está definida por*

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \operatorname{sen} x, \quad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x.$$

Ejercicio 12.2.3. *Probar que cada función polinomial* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es de clase* C^∞ *en* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 12.2.4. *Si* $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *son dos funciones de clase* C^n *para cierto* $n \geq 0$, *de forma tal que la composición* $g \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *está bien definida, demostrar que* $g \circ f$ *es de clase* C^n *en* (a,b).

Interpolación polinomial

Frecuentemente ocurre que una función "complicada" se aproxima por una función más "simple", en cuyo caso es importante poder estimar el error que se comete en dicha aproximación. Dado que las funciones polinomiales son "simples" (por ejemplo, se pueden evaluar fácilmente), muchas veces funciones "complicadas" se aproximan por medio de funciones polinomiales. Una forma posible de hacer esto es mediante la **interpolación polinomial**, es decir, dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y puntos $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ en el intervalo $[a,b]$, aproximamos f mediante el polinomio de menor grado $p \in \mathbb{R}[x]$ que "interpola" a f en los puntos $a_0, \ldots, a_n$, es decir, que satisface las condiciones:

$$p(a_i) = f(a_i) \quad (0 \leq i \leq n). \tag{12.7}$$

La condición de grado $\operatorname{gr}(p) \leq n$ y (12.7) definen unívocamente al polinomio interpolador p, como pedimos demostrar en el ejercicio a continuación.

Ejercicio 12.2.5 (Existencia y unicidad del polinomio interpolador)**.** *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función y sean* $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ *puntos en el intervalo* $[a,b]$.

1. *Siendo* $b_i := f(a_i)$ *para* $0 \leq i \leq n$, *demostrar que el polinomio*

$$p(x) := \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{(x-a_0)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_n)}{(a_i-a_0)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)}$$

   tiene grado menor o igual que n *y satisface la condición (12.7).*

2. *Demostrar que el polinomio* p *del ítem anterior es el único polinomio de grado menor o igual que* n *que satisface (12.7).* (Sugerencia: la diferencia de dos polinomios con estas condiciones tendría al menos $n+1$ raíces distintas.)

Ejemplo 12.2.6. *Supongamos que queremos interpolar la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{sen} x$ *en* $[0, 2\pi]$. *Si elegimos los puntos* $a_i := i\pi/2$ *para* $i = 0, \ldots, 4$, *tenemos que*

$$b_0 := f(0) = 0,\ b_1 := f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 1,\ b_2 := f(\pi) = 0,\ b_3 := f\Big(\frac{3\pi}{2}\Big) = -1,\ b_4 := f(2\pi) = 0.$$

En consecuencia, el polinomio interpolador $p_4(x)$ es el siguiente:

$$\begin{aligned} p_4 &= b_1 \frac{(x-0)(x-\pi)(x-\frac{3\pi}{2})(x-2\pi)}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2})(\frac{\pi}{2}-2\pi)} + b_3 \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)(x-2\pi)}{(\frac{3\pi}{2}-0)(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(\frac{3\pi}{2}-\pi)(\frac{3\pi}{2}-2\pi)} \\ &= -\frac{8}{3\pi^4} x(x-\pi)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)(x-2\pi) + \frac{8}{3\pi^4} x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)(x-2\pi) \\ &= \frac{8}{3\pi^3} x(x-\pi)(x-2\pi). \end{aligned}$$

En la Figura 12.2 mostramos el gráfico de la función f junto con la del polinomio p_4.

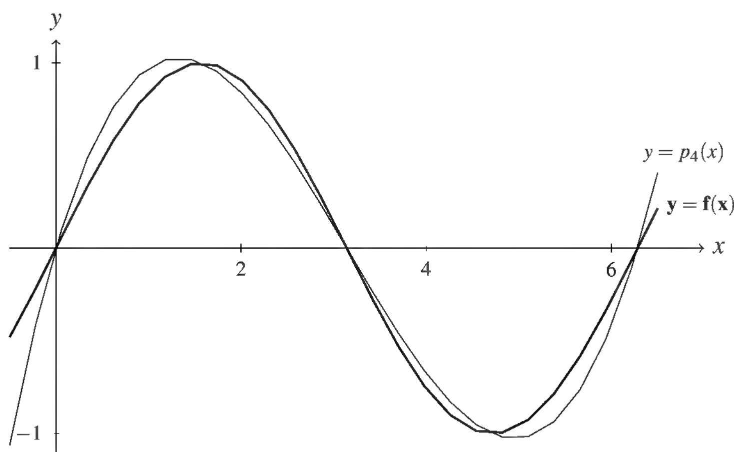


Figura 12.2.: El gráfico de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{sen} x$ y del polinomio p_4.

Por supuesto, dado que se trata de aproximar la función dada con el polinomio interpolador p, es fundamental poder estimar el error que cometemos en esta aproximación. A tal efecto, necesitamos una versión del Teorema de Rolle para funciones varias veces diferenciables, que es el objetivo del siguiente ejercicio.

Ejercicio 12.2.7 (Teorema de Rolle generalizado)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua que es n veces derivable en (a,b). Demostrar que si f tiene $n+1$ ceros distintos $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ en $[a,b]$, entonces existe $c \in (a_0, a_n)$ tal que $f^{(n)}(c) = 0$.* (Sugerencia: aplicar el Teorema de Rolle en cada intervalo $[a_{i-1}, a_i]$ y argumentar recursivamente.)

A fin de estimar el error de aproximar una función f por un polinomio interpolador p vamos a obtener una expresión "simple" de la diferencia $f - p$. El objetivo del siguiente ejercicio es obtener dicha expresión.

Ejercicio 12.2.8. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua que es n veces derivable en (a,b) y sean $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ puntos de $[a,b]$. Fijamos $x \in (a,b) \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$ (¿qué pasa si $x \in \{a_0, \ldots, a_n\}$?)*

y consideramos la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(t) := f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - a_i)} \prod_{i=0}^{n}(t - a_i).$$

1. *Demostrar que existe $c \in (\text{mín}\{a_0, x\}, \text{máx}\{a_n, x\})$ tal que $g^{(n+1)}(c) = 0$.* (Sugerencia: usar el Teorema de Rolle generalizado (Ejercicio 12.2.7).)

2. *Deducir la validez de la siguiente expresión del error de interpolación: existe un punto $c \in (\text{mín}\{a_0, x\}, \text{máx}\{a_n, x\})$ tal que*

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \prod_{i=0}^{n}(x - a_i). \tag{12.8}$$

Ejemplo 12.2.9. *En el caso de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{sen} x$ y del polinomio p_4, de acuerdo con (12.8) vemos que, dado $x \in (0, 2\pi)$, existe $c \in (0, 2\pi)$ tal que*

$$f(x) - p_4(x) = \operatorname{sen} x - p_4(x) = \frac{f^{(v)}(c)}{5!} x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)(x - 2\pi).$$

Por lo tanto, para cada $x \in (0, 2\pi)$ tenemos que

$$|\operatorname{sen} x - p_4(x)| \leq \frac{1}{60} \max_{0<x<2\pi} \left| x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi)\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)(x - 2\pi) \right| \approx 0{,}5787967395. \tag{12.9}$$

Si bien (12.8) provee información sumamente útil en general, en este caso particular (12.9) resulta en una sobrestimación importante del valor verdadero

$$\max_{0<x<2\pi} |\operatorname{sen} x - p_4(x)| \approx 0{,}180758286.$$

12.2.1. Aproximaciones locales de orden superior

A fin de introducir la noción de diferenciabilidad, nos hemos preguntado por la existencia de aproximaciones lineales de una función continua $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ en un entorno de un punto $\alpha \in (a,b)$, y hemos concluido que si f es diferenciable, entonces la función lineal $p : (a,b) \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) := f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$ es la que "mejor" aproxima a f en un entorno de α, en el sentido de que

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - p(x)}{x - \alpha} = 0. \tag{12.10}$$

Observamos que la función p satisface las condiciones

$$p(\alpha) = f(\alpha), \; f'(\alpha) = p'(\alpha). \tag{12.11}$$

Recíprocamente, si $q : (a,b) \to \mathbb{R}$ es una función lineal que satisface la condición (12.10), entonces necesariamente resulta $q(\alpha) = f(\alpha)$ y $q'(\alpha) = f'(\alpha)$. En efecto,

$$f(\alpha) - q(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \big(f(x) - q(x)\big) = \lim_{x \to \alpha} (x - \alpha) \frac{f(x) - q(x)}{x - \alpha} = 0,$$

lo que demuestra que $q(\alpha) = f(\alpha)$. En consecuencia,

$$f'(\alpha) - q'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \frac{\big(f(x) - q(x)\big) - \big(f(\alpha) - q(\alpha)\big)}{x - \alpha} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - q(x)}{x - \alpha} = 0.$$

Así, ambas condiciones (12.10) y (12.11) son equivalentes. Mientras que (12.10) expresa la condición que nos interesa, a saber, que f **es "bien" aproximable por una función lineal**, (12.11) **nos permite obtener explícitamente dicha aproximación lineal**.

Así como es posible aproximar localmente una función diferenciable $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ en torno a un punto $\alpha \in (a,b)$ por una función lineal, cabe preguntarse por la posibilidad de aproximar f en torno a α por funciones polinomiales de grados mayores, y en caso de que esto sea posible, por la mejor aproximación local de grado n para cada $n \in \mathbb{N}$. Hemos dicho que existe una "buena" aproximación lineal de f si f es derivable. De la misma manera, para la existencia de buenas aproximaciones de orden n en torno a $\alpha \in (a,b)$ vamos a requerir que la función f sea n veces derivable.

Para comenzar a analizar esta cuestión, estudiamos en primer lugar el caso $\alpha = 0$. En el siguiente resultado caracterizamos cuándo f se aproxima bien por el polinomio x^n.

Proposición 12.2.10. *Sea $f : (-a,a) \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable. Entonces tenemos que $\lim_{x \to 0} f(x)/x^n = 0$ si y solo si $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$.*

Demostración. Vemos primero que $f^{(i)}(0) = 0$ para $0 \leq i \leq n$ implica $\lim_{x\to 0} f(x)/x^n = 0$, por inducción en n. Supongamos en primer lugar que $f(0) = f'(0) = 0$. Entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0. \tag{12.12}$$

Supongamos ahora el resultado cierto para $n-1$ y sea f una función n veces derivable tal que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$. Tenemos que f' es $n-1$ veces derivable y $f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$, de lo cual, por la hipótesis inductiva, concluimos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x^{n-1}} = 0.$$

Veamos que $\lim_{x\to 0} f(x)/x^n = 0$. Por la regla de L'Hôpital (Teorema 12.1.17) tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{nx^{n-1}} = 0.$$

Probamos ahora que una función n veces derivable $f : (-a,a) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to 0} f(x)/x^n = 0$ satisface la condición $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$. Argumentando por inducción en n, observamos que la afirmación es cierta en los casos $n = 0$ y, por (12.12), $n = 1$. Supongamos ahora la afirmación cierta para $n-1$ y sea f una función n veces derivable que satisface la condición $\lim_{x \to 0} f(x)/x^n = 0$. Entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^{n-1}} = \lim_{x\to 0} x \frac{f(x)}{x^n} = 0,$$

y por hipótesis inductiva tenemos que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Asimismo, definamos $\varphi : (-a,a) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Tenemos entonces que $\varphi(0) = \varphi'(0) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0$, y además, que

$$\varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) - f^{(n)}(0) = 0,$$

de lo cual, por la primera implicación, ya demostrada, concluimos que $\lim_{x\to 0} \varphi(x)/x^n = 0$. Ahora bien,

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x^n} - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right) = -\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Esto prueba que $f^{(n)}(0) = 0$ y concluye la demostración. □

Ejemplo 12.2.11. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por*

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

Observamos que $\lim_{x\to 0} f(x)/x^n = 0$. *En efecto, con el cambio de variables $y = 1/x$ vemos que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^n}{e^{y^2}} = 0,$$

ya que las "exponenciales crecen más rápido que las polinómicas" (Ejercicio 10.1.29).

Por otro lado, vamos a demostrar que f es n veces derivable en $\mathbb{R}$ y

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0.$$

De la regla de la cadena (Teorema 11.2.3) concluimos que f es de clase C^∞ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. A fin de estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$, necesitamos información sobre las derivadas sucesivas de f en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Afirmamos que

$$f^{(k)}(x) = p_k(x^{-1})f(x)$$

para cada $k \geq 0$ y cada $x \neq 0$, donde $p_k \in \mathbb{R}[x]$ es un polinomio de grado $3k$.

Vamos a demostrar esta afirmación por inducción en k. Si $k = 0$, el resultado es evidente. Suponiendo el caso k válido, tenemos que

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) = (p_k(x^{-1})f(x))' &= -x^{-2}p_k'(x^{-1})f(x) + p_k(x^{-1})2x^{-3}f(x), \\ &= f(x)\big(-(x^{-1})^2 p_k'(x^{-1}) + 2p_k(x^{-1})(x^{-1})^3\big). \end{aligned}$$

Dado que p_k tiene grado $3k$, concluimos que

$$p_{k+1}(T) := -T^2 p_k'(T) + 2p_k(T)T^3$$

tiene grado $3k+3$. Esto concluye la inducción y demuestra la afirmación.

Afirmamos ahora que $f^{(k)}(0) = 0$ para cada $k \geq 0$. Argumentando nuevamente por inducción, el caso $k = 0$ es consecuencia del hecho de que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Suponiendo $f^{(k)}(0) = 0$, tenemos que

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{-1} p_k(x^{-1}) f(x) = 0,$$

ya que las "exponenciales crecen más rápido que las polinómicas" (Ejercicio 10.1.29). Así vemos que la equivalencia de la Proposición 12.2.10 se verifica en este caso.

12.2.2. El Teorema de Taylor

Supongamos que queremos aproximar una función n veces derivable $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ en un punto $\alpha \in (a,b)$ por medio de un polinomio p de grado a lo sumo n, de manera tal que, localmente, p aproxime a f **con orden** n, es decir, si $r(x) := f(x) - p(x)$, entonces

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{r(x)}{(x-\alpha)^n} = 0. \tag{12.13}$$

Dado que f y p son funciones n veces derivables en α, si hacemos el cambio de variables $y = x - \alpha$, de la Proposición 12.2.10 concluimos que (12.13) se satisface si y solo si

$$r(\alpha) = r'(\alpha) = \cdots = r^{(n)}(\alpha) = 0.$$

Dado que $0 = r^{(j)}(\alpha) = f^{(j)}(\alpha) - p^{(j)}(\alpha)$ para $j = 0, \ldots, n$, concluimos que **un polinomio** p **aproxima a** f **con orden** n **en** α si y solo si satisface las condiciones

$$p(\alpha) = f(\alpha),\ p'(\alpha) = f'(\alpha), \ldots,\ p^{(n)}(\alpha) = f^{(n)}(\alpha). \tag{12.14}$$

Nuestro siguiente resultado afirma que estas condiciones determinan unívocamente un polinomio de grado a lo sumo n (ver el Teorema 7.2.6 por otra demostración).

Lema 12.2.12 (Existencia y unicidad del polinomio de Taylor). *Existe un único polinomio $p_n \in \mathbb{R}[x]$ de grado a lo sumo n que satisface las condiciones (12.14).*

Demostración. Consideremos el conjunto $\mathbb{R}[x]_n$ formado por todos los polinomios $p \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual que n. El lema afirma que existe un único elemento de $\mathbb{R}[x]_n$ que satisface las condiciones (12.14). Si expresamos a cada polinomio $p \in \mathbb{R}[x]_n$ como habitualmente, esto es, en la forma $p := a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, observamos que (12.14) resulta de hecho un sistema de ecuaciones lineales "cuadrado" en los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ de p, cuya matriz es triangular e inversible:

$$\begin{cases} a_n\alpha^n & + \cdots + a_1\alpha + a_0 & = & f(\alpha), \\ na_n\alpha^{n-1} & + \cdots + a_1 & = & f'(\alpha), \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ n!a_n & & = & f^{(n)}(\alpha). \end{cases}$$

Dado que este sistema tiene una única solución, existe un único polinomio $p_n \in \mathbb{R}[x]_n$ que satisface

(12.14). □

Definición 12.2.13 (Polinomio de Taylor). *El polinomio p_n del enunciado del Lema 12.2.12 se denomina el* **polinomio de Taylor de orden** *n de f en α.*

Una consecuencia de la Proposición 12.2.10 es el siguiente resultado, que nos provee una caracterización "operativa" de la propiedad de que una función n veces derivables pueda ser aproximada localmente con orden n por un polinomio de grado a lo sumo n.

Teorema 12.2.14 (Teorema de Taylor). *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable y sea $\alpha \in (a,b)$. Sea p_n el polinomio de Taylor de orden n de f en α y $r_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ la función de "error", esto es,*

$$p_n := f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n, \quad r_n(x) := f(x) - p_n(x).$$

Entonces r_n es n veces derivable y satisface la condición

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{r_n(x)}{(x-\alpha)^n} = 0.$$

Demostración. Es fácil ver, mediante una comprobación directa, que $f^{(j)}(\alpha) = p^{(j)}(\alpha)$ para $j = 0,\dots,n$. Por lo tanto, $r_n := f - p_n$ satisface la condición

$$r_n(\alpha) = \cdots = r_n^{(n)}(\alpha) = 0.$$

En consecuencia, de la caracterización de la funciones bien aproximables por x^n (Proposición 12.2.10) deducimos que $\lim_{x\to\alpha} r(x)/(x-\alpha)^n = 0$, como queríamos demostrar. □

Ejemplo 12.2.15. *Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$. En el Ejemplo 12.2.1 hemos visto que f es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y $f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por*

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

para cada $n \geq 0$. Teniendo en cuenta que $f^{(n)}(0) = 1$ para cada $n \geq 0$, concluimos que el n–ésimo polinomio de Taylor de f en $\alpha = 0$ es

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

En la Figura 12.3 mostramos el gráfico de la función f junto con el de los polinomios p_1 y p_2 de Taylor de f en $\alpha = 0$ de órdenes 1 y 2 respectivamente.

Ejemplo 12.2.16. *Nuestro siguiente ejemplo es la función seno* $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *En el Ejemplo 12.2.2 hemos visto que f es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y $f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por*

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \operatorname{sen} x, \quad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n.$$

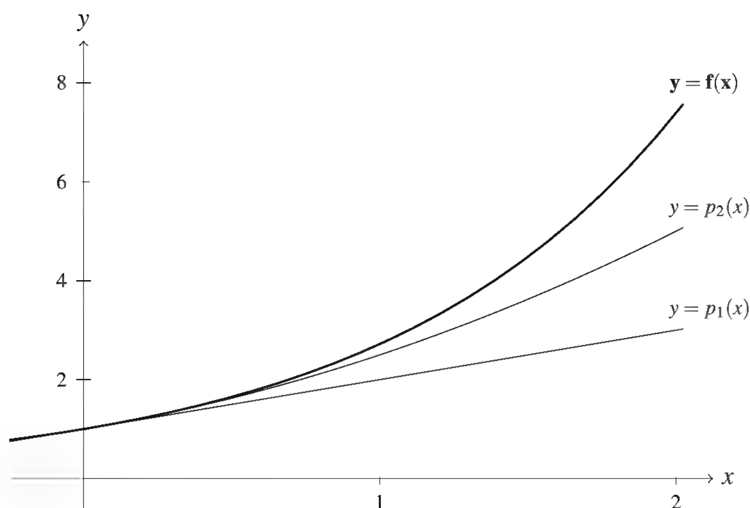


Figura 12.3.: El gráfico de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=e^x$ y de las funciones definidas por los polinomios p_1 y p_2 de Taylor de f en $\alpha=0$ de orden 1 y 2.

En consecuencia, el polinomio de Taylor de orden $2n+1$ y $2n+2$ de f en $\alpha=0$ es

$$p_{2n+1}(x)=p_{2n+2}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

En la Figura 12.4 mostramos el gráfico de la función f junto con el de los polinomios p_3 y p_5 de Taylor de f en $\alpha=0$.

Ejercicio 12.2.17. *Determinar el n–ésimo polinomio de Taylor de* $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *en* 0*.*

Ejercicio 12.2.18. *Demostrar que el n–ésimo polinomio de Taylor de la función* $\ln:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *en* 1 *es* $p_n(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\cdots+(-1)^{n+1}(x-1)^n$.

Ejercicio 12.2.19. *Sea $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ la función $f(x):=1/(1-x)$. Demostrar que el n–ésimo polinomio de Taylor de f en 0 es $p_n(x):=1+x+\cdots+x^n$.*

Ejercicio 12.2.20. *Sea $p\in\mathbb{R}[x]$ un polinomio. Demostrar que $p(a)=\cdots=p^{(n)}(a)=0$ si y solo si existe $q\in\mathbb{R}[x]$ tal que $p=(x-a)^{n+1}q$.*

Ejercicio 12.2.21. *Sea $a>0$ y $f:(-a,a)\to\mathbb{R}$ una función 4 veces derivable que satisface las condiciones $f(0)=0$ y $f'(0)=0$. Determinar el polinomio de Taylor de orden 3 y de orden 4 en el origen de la función $g:(-a,a)\to\mathbb{R}$, $g(x):=x^3f(x)$.*

Ejercicio 12.2.22. *Sea $f:(-a,a)\to\mathbb{R}$ una función infinitamente derivable y sea $m\in\mathbb{N}$. Si $p_n\in\mathbb{R}[x]$ es el n–ésimo polinomio de Taylor de f en 0, demostrar que $p_n(x^m)$ es el $(m(n+1)-1)$–ésimo polinomio de Taylor de la composición $f\circ x^m$ en 0.*

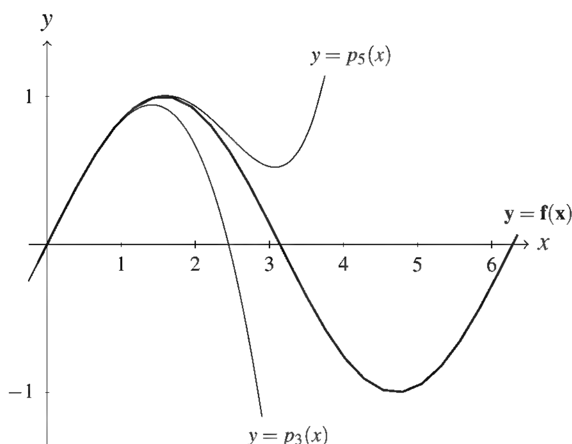


Figura 12.4.: El gráfico de la función seno sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y de las funciones definidas por los polinomios p_3 y p_5 de Taylor de f en $\alpha = 0$ de orden 3 y 5.

Ejercicio 12.2.23. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable y sea $q \in \mathbb{R}[x]$ el $(n-1)$–ésimo polinomio de Taylor de f' en $\alpha \in (a,b)$. Si $p \in \mathbb{R}[x]$ satisface que $p' = q$ y $p(\alpha) = f(\alpha)$, demostrar que p es el n–ésimo polinomio de Taylor de f en α.*

Ejercicio 12.2.24. *El propósito del presente ejercicio es obtener el n–ésimo polinomio de Taylor de* $\operatorname{arctg} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ *en 0.*

1. *Demostrar que el n–ésimo polinomio de Taylor de $g : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) := 1/(1+x)$ en 0 es $1 - x + \cdots + (-1)^n x^n$.* (Sugerencia: usar el Ejercicio 12.2.19.)

2. *Demostrar que el $(2n+1)$–ésimo polinomio de Taylor de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) := 1/(1+x^2)$ en 0 es $1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n}$.* (Sugerencia: usar el Ejercicio 12.2.22.)

3. *Concluir que el $(2n+1)$–ésimo polinomio de Taylor de* $\operatorname{arctg} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ *en 0 es*

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

(Sugerencia: utilizar el Ejercicio 12.2.23.)

12.2.3. Una expresión explícita del error en el Teorema de Taylor

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $\alpha \in (a,b)$. Como hemos visto, el n–ésimo polinomio de Taylor p_n de f en α puede ser utilizado a fin de aproximar f en un entorno de α. En tal sentido, es importante tener estimaciones del error que cometemos cuando aproximamos f mediante el polinomio p_n. El siguiente resultado, que es una generalización del Teorema del valor medio (Teorema 12.1.4), da una expresión para la diferencia $f - p_n$ a partir de la cual se puede estimar dicho error.

Teorema 12.2.25 (Expresión para el error en el Teorema de Taylor). *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable y sea p_n su polinomio de Taylor de orden n en $\alpha\in(a,b)$. Si $x\in(a,b)$, entonces existe c en el intervalo abierto* $\operatorname{int}(x,\alpha)$ *definido por α y x tal que*

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1}.$$

Demostración. Dado que el enunciado es evidentemente cierto para $x=\alpha$, fijemos $x\in(a,b)\setminus\{\alpha\}$. Se trata entonces de demostrar que existe c en $\operatorname{int}(x,\alpha)$ tal que

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-\alpha)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Sea $r_n:(a,b)\to\mathbb{R}$, $r_n(x):=f(x)-p_n(x)$. Tenemos que $r_n(\alpha)=f(\alpha)-p_n(\alpha)=0$, de donde, por el Teorema del valor medio (Teorema 12.1.4), concluimos que existe $c_1\in\operatorname{int}(\alpha,x)$ tal que

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-\alpha)^{n+1}}=\frac{r_n(x)}{(x-\alpha)^{n+1}}=\frac{r_n(x)-r_n(\alpha)}{(x-\alpha)^{n+1}-(\alpha-\alpha)^{n+1}}=\frac{r_n'(c_1)}{(n+1)(c_1-\alpha)^n}.$$

Dado que $r_n'(\alpha)=f'(\alpha)-p_n'(\alpha)=0$, podemos aplicar nuevamente el Teorema del valor medio y concluir que existe $c_2\in\operatorname{int}(\alpha,c_1)\subset\operatorname{int}(\alpha,x)$ tal que

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-\alpha)^{n+1}}=\frac{r_n'(c_1)}{(n+1)(c_1-\alpha)^n}=\frac{r_n'(c_1)-r_n'(\alpha)}{(n+1)(c_1-\alpha)^n-(n+1)(\alpha-\alpha)^n}=\frac{r_n''(c_2)}{(n+1)n(c_2-\alpha)^{n-1}}.$$

Prosiguiendo de esta manera, deducimos la existencia de $c\in\operatorname{int}(\alpha,x)$ tal que

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-\alpha)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(c)-p_n^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

como queríamos demostrar. □

Ejemplo 12.2.26. *En el Ejemplo 12.2.15 hemos visto que el n–ésimo polinomio p_n de Taylor de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=e^x$ en 0 es el siguiente:*

$$p_n(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n.$$

A fin de estimar la diferencia $f(x)-p_n(x)$, de acuerdo con la expresión del error del Teorema 12.2.25 tenemos que, dado $x\in\mathbb{R}$, existe $c\in\operatorname{int}(0,x)$ tal que

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Aplicando, por ejemplo, el criterio del cociente (Ejercicio 3.1.15) deducimos que, dado $x\in\mathbb{R}$, la sucesión $(x^{n+1}/(n+1)!)_{n>0}$ converge a 0. Esto prueba que

$$e^x=\lim_{n\to\infty}p_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{n!}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo. En particular, si $x = 1$, tenemos que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

forma en la cual, de hecho, hemos definido e (Sección 6.3.3).

Ejemplo 12.2.27. *En el Ejemplo 12.2.16 hemos visto que los polinomios de Taylor de la función seno* sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *en $\alpha = 0$ tienen la siguiente expresión:*

$$p_{2n+1}(x) = p_{2n+2}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

De acuerdo con la expresión del error del Teorema 12.2.25, tenemos que

$$|f(x) - p_{2n+2}(x)| = \left| \frac{f^{2n+3}(c)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \right| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Aplicando el criterio del cociente (Ejercicio 3.1.15) es fácil ver que, dado $x \in \mathbb{R}$, la sucesión $(|x|^{2n+3}/(2n+3)!)_{n>0}$ converge a 0. Así, para cada $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\operatorname{sen} x = \lim_{n \to \infty} p_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ejercicio 12.2.28. *Si p_n es el n–ésimo polinomio de Taylor de* ln : $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *en 1, demostrar que para cada $x \in (0, +\infty)$ existe $c \in \operatorname{int}(1, x)$ tal que*

$$f(x) - p_n(x) = (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)c^{n+1}}.$$

Concluir que, para cada $x \in [1/2, 2]$[1]*, resulta*

$$\ln x = \lim_{n \to \infty} p_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}.$$

Ejercicio 12.2.29. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función 4 veces derivable y sea $\alpha \in (a,b)$. De la definición de $f'(\alpha)$ y el Ejercicio 11.1.14 tenemos que*

$$f'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha - h)}{2h}.$$

Si la derivada $f'(\alpha)$ es difícil de calcular, o no se puede determinar a partir de los datos disponibles sobre la función f, se la suele aproximar por alguna de las expresiones

$$\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} \quad o \quad \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha - h)}{2h}$$

para h "chico". En tal sentido, conviene saber cuál de estas dos expresión es la que mejor apro-

[1] En realidad, hay convergencia para cada $x \in (0, 2]$, pero no tenemos por el momento herramientas como para asegurarlo (ver el Ejemplo 16.1.24).

xima a $f'(\alpha)$.

1. *Sea* $h \in \mathbb{R}$ *tal que* $\alpha + h \in (a,b)$. *Demostrar que existe* $c \in \operatorname{int}(\alpha, \alpha+h)$ *tal que*

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) + \frac{h}{2} f''(c).$$

   (Sugerencia: expresar $f(\alpha+h)$ mediante la suma del polinomio de Taylor de f en α de orden uno y el correspondiente término de error.)

2. *Sea* $h \in \mathbb{R}$ *tal que* $\alpha + h \in (a,b)$. *Demostrar que existen* $c \in \operatorname{int}(\alpha, \alpha+h)$ *y* $c' \in \operatorname{int}(\alpha, \alpha-h)$ *tales que*

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{2h} = f'(\alpha) + \frac{h^2}{12}\big(f'''(c) + f'''(c')\big).$$

   (Sugerencia: expresar $f(\alpha+h)$ y $f(\alpha-h)$ mediante la suma del polinomio de Taylor de f en α de orden dos y los correspondientes términos de error.)

Ejercicio 12.2.30. *Sea* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *una función 4 veces derivable y sea* $\alpha \in (a,b)$. *Demostrar que si* $(\alpha - |h|, \alpha + |h|) \subset (a,b)$, *entonces existen* $c \in \operatorname{int}(\alpha, \alpha+h)$ *y* $c' \in \operatorname{int}(\alpha, \alpha-h)$ *tales que*

$$\frac{f(\alpha-h)-2f(\alpha)+f(\alpha+h)}{h^2} = f''(\alpha) + \frac{h^2}{24}\big(f^{(4)}(c) + f^{(4)}(c')\big).$$

13. Los problemas modelo con funciones diferenciables

En los dos capítulos precedentes hemos discutido la noción de diferenciabilidad y hemos establecido dos resultados fundamentales que nos permiten estimar errores en aproximaciones que involucran funciones diferenciables: el Teorema del valor medio y el Teorema de Taylor. El propósito de este capítulo es abordar los tres problemas modelo que hemos considerado hasta el momento, esto es, la resolución de ecuaciones, la minimización y la existencia de estados de equilibrio (o puntos fijos), con las nuevas herramientas que tenemos a nuestra disposición.

El valor que toman las derivadas sucesivas de una función f en un punto α de su dominio nos permite conocer en profundidad el comportamiento de f en torno a α, y por ende, nos provee información esencial para atacar nuestros problemas modelo. En tal sentido, vamos a ver que los puntos en los que una función diferenciable alcanza sus mínimos locales son necesariamente puntos críticos de la misma, lo que nos permite reducir la cuestión de la minimización a la de la resolución de ecuaciones. Más aún, el signo de la derivada segunda de la función en consideración en los puntos críticos nos permite "clasificarlos". Asimismo, el valor absoluto de la derivada de una función en un estado de equilibrio (un punto fijo) de la misma nos provee un criterio de convergencia local de la iteración de punto fijo mucho más fácil de aplicar que el Teorema de punto fijo. Además, el polinomio de Taylor de tal función en un entorno del estado de equilibrio nos permite determinar el orden de convergencia de dicha iteración. Por último, en ecuaciones que involucran funciones diferenciables, la estrategia de linealización nos provee un método sumamente eficiente de resolución: el método de Newton, cuyo análisis de convergencia requiere del estudio de las derivadas sucesivas de la función en cuestión en torno a la solución considerada.

13.1. Minimización de funciones diferenciables

Comenzamos con la cuestión de minimizar una función diferenciable $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. El hecho de que f es diferenciable nos provee una herramienta fundamental para determinar "candidatos" a mínimos de f, como discutimos a continuación.

Decimos que f alcanza en $\alpha\in(a,b)$ un

- **mínimo local** si existe $\varepsilon>0$ tal que $f(\alpha)\leq f(x)$ para cada $x\in(-\varepsilon+\alpha,\varepsilon+\alpha)$;
- **máximo local** si existe $\varepsilon>0$ tal que $f(\alpha)\geq f(x)$ para cada $x\in(-\varepsilon+\alpha,\varepsilon+\alpha)$.

Es importante tener en cuenta que si f alcanza **un extremo (mínimo o máximo) local en $\alpha\in(a,b)$, no necesariamente alcanza un extremo global** en dicho punto (ver la Figura 13.1). De

todas maneras, es claro que donde f alcanza sus extremos globales necesariamente alcanza extremos locales, por lo que identificar tales puntos nos provee "candidatos" a extremos globales de f.

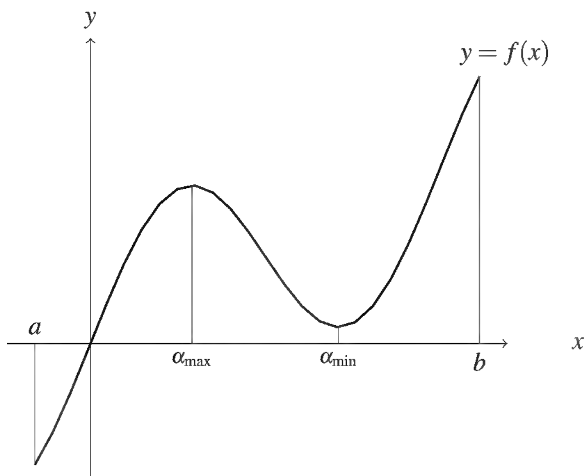


Figura 13.1.: Una función diferenciable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que alcanza un máximo y un mínimo locales que no son globales.

13.1.1. Existencia de mínimos locales

Para funciones diferenciables tenemos un criterio sumamente útil para identificar los puntos en los que posiblemente éstas alcanzan sus extremos locales. En efecto, si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable y alcanza un extremo local en $\alpha \in (a,b)$, digamos un mínimo, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(\alpha) \leq f(x)$ para cada $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. Observamos que

$$f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \to \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}.$$

Si $x \leq \alpha$, entonces, dado que $f(\alpha) \leq f(x)$ para cada $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, concluimos que

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0$$

para cada $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha)$, y por lo tanto, resulta

$$\lim_{x \to \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0. \tag{13.1}$$

Por otro lado, si $x \geq \alpha$, como $f(\alpha) \leq f(x)$ para cada $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, tenemos que

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0$$

para cada $x \in (\alpha, \alpha+\varepsilon)$, de lo cual deducimos que

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0. \tag{13.2}$$

Combinando (13.1) y (13.2) vemos que $f'(\alpha) = 0$. Así obtenemos la condición necesaria para que f alcance un extremo local en α que enunciamos a continuación.

Teorema 13.1.1 (Condición necesaria de existencia de extremos locales). *Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable y alcanza un extremo local en $\alpha \in (a,b)$, entonces $f'(\alpha) = 0$.*

Cabe destacar que en un punto $\alpha \in (a,b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$, la función f **no necesariamente alcanza un extremo local**, es decir, el enunciado recíproco del teorema precedente no es cierto. Esto se puede constatar fácilmente considerando la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, para la cual tenemos que $f(0) = 0$, en tanto que 0 no es ni un máximo ni un mínimo local de f, ya que

- $f(x) < f(0)$ para cada $x \in (-\infty, 0)$;
- $f(x) > f(0)$ para cada $x \in (0, +\infty)$.

Un punto $\alpha \in (a,b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$ se denomina un **punto crítico** o **estacionario** de f. La condición necesaria de existencia de extremos locales precedente (Teorema 13.1.1) asegura que los puntos críticos de una función f resultan "candidatos" a puntos en los que f alcanza sus extremos locales.

Ejemplo 13.1.2. *Analizamos los puntos críticos de la función*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^4 - (16/3)x^3 + 10x^2 - 8x + 1.$$

Tenemos que

$$f'(x) = 4x^3 - 16x^2 + 20x - 8 = 4(x-1)^2(x-2).$$

En consecuencia, hay dos puntos críticos: $x = 1$ y $x = 2$. Del gráfico de f (ver la Figura 13.2) fácilmente concluimos que en $x = 2$ la función alcanza un mínimo local (que en realidad resulta el mínimo global), en tanto que en $x = 1$ la función f no alcanza un extremo local. Cabe destacar que más adelante vamos a discutir criterios que nos van a permitir determinar si f alcanza un extremo local en un punto crítico o no.

Ejercicio 13.1.3. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función polinomial de grado n.*

1. *Demostrar que f alcanza a lo sumo $n-1$ extremos locales.*
2. *Fijemos $k \in \mathbb{Z}$ y consideremos la restricción $f|_{[k,k+1]} : [k,k+1] \to \mathbb{R}$. De acuerdo con el Teorema de Weierstrass (Teorema 8.2.10), la función $f|_{[k,k+1]}$ alcanza en el intervalo $[k,k+1]$ su máximo y su mínimo globales. Dado que existen infinitos intervalos $[k,k+1]$, ¿contradice esto el enunciado del ítem anterior?*

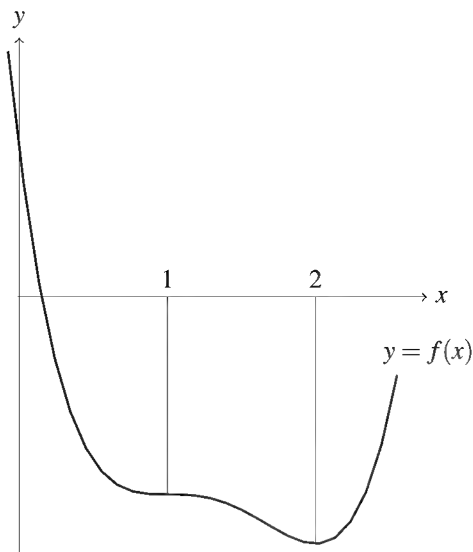


Figura 13.2.: El gráfico de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^4 - (16/3)x^3 + 10x - 8x + 1$.

Criterios de existencia de mínimos locales de segundo orden

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\alpha \in (a,b)$ un punto crítico de f. En el capítulo precedente hemos dicho que, a fin de determinar si f alcanza un extremo local en α, es necesario estudiar el comportamiento de la función $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ en α. El propósito de esta sección es observar que, si f es dos veces diferenciable en (a,b), entonces la derivada segunda $f''(\alpha)$ nos provee información de importancia.

Supongamos entonces que f es 2 veces derivable. Se trata de analizar el signo del incremento $f(x) - f(\alpha)$ para valores de x "cercanos" a α. Dado que α es un punto crítico de f, resulta $f'(\alpha) = 0$, por lo que

$$f(x) - f(\alpha) = f(x) - f(\alpha) - f'(\alpha)(x - \alpha) = f(x) - p_1(x),$$

donde p_1 es el polinomio de Taylor de f en α de orden 1. De acuerdo con la regla de L'Hôpital (Teorema 12.1.17) tenemos que

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - p_1(x)}{(x - \alpha)^2} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{(x - \alpha)^2} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{2(x - \alpha)} = \frac{f''(\alpha)}{2}.$$

De esto concluimos que existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, resulta

- $f(x) - f(\alpha) > 0$ si $f''(\alpha) > 0$;
- $f(x) - f(\alpha) < 0$ si $f''(\alpha) < 0$.

Esto nos provee el siguiente **criterio suficiente de existencia de extremos locales** de una función dos veces derivable.

Teorema 13.1.4 (Criterio de segundo orden de existencia de extremos locales). *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función dos veces derivable y sea $\alpha\in(a,b)$.*

- *Si $f'(\alpha)=0$ y $f''(\alpha)<0$, entonces f alcanza un máximo local en α.*
- *Si $f'(\alpha)=0$ y $f''(\alpha)>0$, entonces f alcanza un mínimo local en α.*

Ejemplo 13.1.5 (Continuación del Ejemplo 13.1.2). *Consideremos nuevamente la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x):=x^4-(16/3)x^3+10x^2-8x+1.$$

Hemos visto que f tiene dos puntos críticos: $x=1$ y $x=2$. A partir del gráfico de f (ver la Figura 13.2) concluimos que f alcanza en $x=2$ un mínimo local, en tanto que no alcanza un extremo local en $x=1$. En relación con nuestro criterio suficiente de existencia de extremos locales (Teorema 13.1.4), observamos que

$$f''(x)=12x^2-32x+20=4(x-1)(3x-5),$$

de lo cual concluimos que $f''(2)>0$ y $f''(1)=0$. Dado que $f'(2)=0$ y $f''(2)>0$, del Teorema 13.1.4 deducimos que f alcanza en $x=2$ un mínimo local. Por otro lado, dado que $f''(1)=0$, el criterio de segundo orden no nos asegura nada. A fin de analizar el comportamiento de f en torno a $x=1$, observamos que el polinomio de Taylor p_4 de f de orden 4 en $x=1$ coincide con f, es decir, $f(x)=p_4(x)$ para cada $x\in\mathbb{R}$. La expresión explícita de dicho polinomio es:

$$f(x)=p_4(x)=-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}(x-1)^3+(x-1)^4=-\frac{4}{3}+(x-1)^3\left(x-\frac{7}{3}\right).$$

Vemos entonces que $f(x)<f(1)$ para cada $x\in(1,7/3)$ y $f(x)>f(1)$ para cada $x\in(-\infty,1)$. Esto demuestra que f no alcanza un extremo local en $x=1$.

Ejercicio 13.1.6. *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función de clase C^5 y sea $\alpha\in(a,b)$ tal que $f'(\alpha)=f''(\alpha)=0$. Demostrar que*

- *si $f'''(\alpha)\neq0$, entonces f no alcanza un extremo local en α;*
- *si $f'''(\alpha)=0$ y $f^{(iv)}(\alpha)\neq0$, entonces f alcanza un extremo local en α.*

Ejercicio 13.1.7 (Condiciones necesarias de segundo orden). *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función dos veces derivable y sea $\alpha\in(a,b)$. Demostrar la siguiente "recíproca parcial" del criterio suficiente para la existencia de extremos locales (Teorema 13.1.4):*

- *si f alcanza un máximo local en α, entonces $f'(\alpha)=0$ y $f''(\alpha)\leq0$;*
- *si f alcanza un mínimo local en α, entonces $f'(\alpha)=0$ y $f''(\alpha)\geq0$.*

13.1.2. Existencia de mínimos globables: funciones convexas

Lo que hemos visto en la sección precedente nos permite determinar los extremos **locales** de una función diferenciable. Esto puede considerarse como un paso previo en la dirección del problema

que realmente nos interesa, es decir, el de determinar los extremos **globales** de la función en consideración.

Desafortunadamente, no existen herramientas "simples" que nos permitan determinan si una función dada alcanza sus extremos globales, salvo que se trate de una función continua definida en un conjunto compacto, en cuyo caso tenemos una respuesta positiva: el Teorema de Weierstrass. Por esto, tratándose de decidir, por ejemplo, si una función diferenciable $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ alcanza su mínimo global, vamos a restringir nuestra discusión a una clase importante de funciones: las funciones convexas. Una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ se dice **convexa** si, para cada par de puntos $x,y\in(a,b)$ y cada $\theta\in[0,1]$, tenemos que

$$f\big(\theta x+(1-\theta)y\big)\leq\theta f(x)+(1-\theta)f(y). \tag{13.3}$$

Un problema de optimización definido por una función convexa se denomina un **problema de optimización convexa**. El interés por los problemas de optimización convexa proviene del hecho de que dicha clase de problemas describe una serie de fenómenos de importancia práctica (ver, por ejemplo, [SB94] por aplicaciones en economía), y a la vez, se dispone de herramientas teóricas y prácticas para resolverlos. Esto último es consecuencia, en parte, de una propiedad fundamental de las funciones convexas: **en un punto crítico, una función convexa alcanza su mínimo global**. El propósito de esta sección es discutir resultados que nos permitan determinar si una función diferenciable dada es convexa y analizar la existencia de extremos globales de funciones convexas.

Comenzamos observando que (13.3) tiene descripción geométrica simple: dado que

$$\operatorname{int}(x,y):=\{\theta x+(1-\theta)y:\theta\in[0,1]\}$$

representa el segmento (el intervalo) que une x con y, y similarmente, el conjunto

$$\{\theta f(x)+(1-\theta)f(y):\theta\in[0,1]\}$$

determina el segmento que une $f(x)$ con $f(y)$, podemos reinterpretar (13.3) como la condición de que **el gráfico de f permanezca debajo del segmento que une $(x,f(x))$ con $(y,f(y))$ en el intervalo** $\operatorname{int}(x,y)$ para cada $x,y\in(a,b)$ (ver la Figura 13.3).

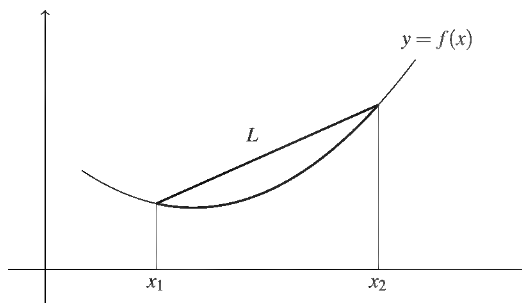


Figura 13.3.: El gráfico de una función convexa f y el segmento L que une dos puntos $(x_1,f(x_1))$ e $(x_2,f(x_2))$ del gráfico de f.

Ejemplo 13.1.8. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=x^2$. Afirmamos que f es convexa. En efecto, dados $x,y\in\mathbb{R}$ y $\theta\in[0,1]$, tenemos que*

$$\begin{aligned}\big(\theta x+(1-\theta)y\big)^2 &= \theta^2x^2+2\theta(1-\theta)xy+(1-\theta)^2y^2\\ &\le \theta^2x^2+\theta(1-\theta)(x^2+y^2)+(1-\theta)^2y^2 \;=\; \theta x^2+(1-\theta)y^2,\end{aligned}$$

donde usamos la desigualdad $2xy\le x^2+y^2$. Esto demuestra que f es convexa.

Ejercicio 13.1.9 (Funciones cóncavas). *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función. Diremos que f es* **cóncava** *si, para cada par de puntos $x,y\in(a,b)$ y cada $\theta\in[0,1]$, tenemos que*

$$f\big(\theta x+(1-\theta)y\big)\ge\theta f(x)+(1-\theta)f(y).$$

Demostrar que $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es cóncava si y solo si $-f$ es convexa.

Las funciones convexas satisfacen una propiedad, la **desigualdad de Jensen**, que, en su forma "finita", es el objetivo del siguiente ejercicio.

Ejercicio 13.1.10 (Desigualdad de Jensen). *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función convexa. Dados $x_1,\dots,x_n\in(a,b)$ y $\theta_1\ge 0,\dots,\theta_n\ge 0$ con $\theta_1+\cdots+\theta_n=1$, demostrar que*

$$f(\theta_1x_1+\cdots+\theta_nx_n)\le\theta_1f(x_1)+\cdots+\theta_nf(x_n).$$

(Sugerencia: argumentar por inducción, usando las identidades

$$\sum_{i-1}^{n}\theta_ix_i=\theta_1x_1+(1-\theta_1)\sum_{i=2}^{n}\frac{\theta_i}{1-\theta_1}x_i,\qquad\sum_{i=2}^{n}\frac{\theta_i}{1-\theta_1}=1,$$

para el paso inductivo.)

Los mínimos globales de una función convexa

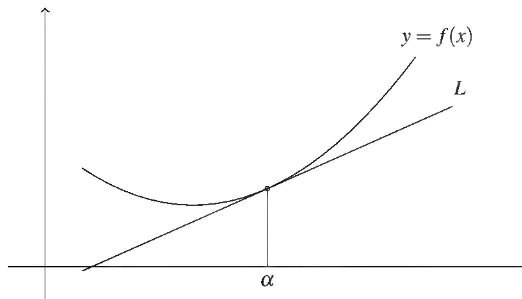


Figura 13.4.: La recta tangente L al gráfico de una función convexa f en un punto $x=\alpha$.

Geométricamente parece claro que el gráfico de una función convexa se mantiene por "encima" de cualquier recta tangente al mismo (ver la Figura 13.4). Más precisamente, sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

una función diferenciable. Afirmamos que si $\alpha \in (a,b)$, entonces

$$f(x) \geq f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) \tag{13.4}$$

para cada $x \in (a,b)$. En otras palabras, dado que la expresión $p(x) := f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$ es de hecho el polinomio de Taylor de orden 1 en f en α, (13.4) asegura que **el polinomio de Taylor p es un subestimador global** de la función f. También es válida la afirmación recíproca: si el polinomio de Taylor de orden 1 de f es un subestimador global para cada $\alpha \in (a,b)$, entonces f es convexa.

En particular, (13.4) ilustra un principio general sobre las funciones convexas: a partir de **información local** sobre f (el polinomio de Taylor de orden 1 de f en α) podemos obtener **información global** (una subestimación de f). De hecho, una consecuencia fundamental de este principio es que, **en un punto crítico, una función convexa alcanza su mínimo global**. En efecto, aceptando la validez de (13.4), vemos que si $f'(\alpha) = 0$, entonces $f(\alpha) \leq f(x)$ para cada $x \in (a,b)$. A su vez, invirtiendo el sentido de las desigualdades concluimos que, **en un punto crítico, una función cóncava alcanza máximo global**. En resumen, tenemos el siguiente enunciado.

Teorema 13.1.11 (Extremos globales de una función convexa)**.** *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $\alpha \in (a,b)$.*

- *Si f es convexa y $f'(\alpha) = 0$, entonces $f(\alpha)$ es el mínimo global de f.*
- *Si f es cóncava y $f'(\alpha) = 0$, entonces $f(\alpha)$ es el máximo global de f.*

Ejemplo 13.1.12. *Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^x - x$. Como vamos a poder concluir más adelante, f es una función convexa. Observamos que $f'(x) = e^x - 1$, por lo que $f'(x) = 0$ si y solo si $x = 0$. De acuerdo con la caracterización de los mínimos globales de una función convexa (Teorema 13.1.11), tenemos que f alcanza su mínimo global en $x = 0$, a saber, $f(0) = 1$. Esto significa que*

$$e^x - x \geq 1$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, desigualdad que habíamos obtenido previamente a partir del Teorema del valor medio (Ejemplo 12.1.10).

13.1.3. Caracterizaciones de funciones convexas y aplicaciones

En vistas de la caracterización de los extremos globales de una función diferenciable convexa (Teorema 13.1.11), resulta interesante tener criterios que nos permitan identificar funciones convexas. En lo que sigue, vamos a establecer condiciones de “primer” y “segundo” orden que implican que una función dada es convexa.

Condiciones de primer orden para la convexidad

Analizamos (13.4). Supongamos en primer lugar que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es convexa y sean $x, \alpha \in (a,b)$. Sea $\theta \in (0,1]$. Si “despejamos” $f(x)$ en la definición de función convexa (13.3), obtenemos

que
$$\frac{f\big(\alpha+\theta(x-\alpha)\big)-f(\alpha)}{\theta}+f(\alpha)\leq f(x).$$
Haciendo tender θ a 0 en esta expresión deducimos que $f(x)\geq f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)$, es decir, que vale (13.4).

Recíprocamente, supongamos que vale (13.4) para cada $x,\alpha\in(a,b)$. Sean $x,y\in(a,b)$ dos puntos distintos y sea $z:=\theta x+(1-\theta)y$ para cierto $\theta\in[0,1]$. De (13.4) vemos que

$$f(x)\geq f(z)+f'(z)(x-z),\quad f(y)\geq f(z)+f'(z)(y-z).$$

Multiplicando la primera desigualdad por θ, la segunda por $1-\theta$, y sumándolas, obtenemos

$$\theta f(x)+(1-\theta)f(y)\geq f(z)+f'(z)(\theta x+(1-\theta)y-z)=f\big(\theta y+(1-\theta)x\big).$$

En conclusión, hemos obtenido una caracterización de "primer orden" de la convexidad. Invirtiendo el signo de las desigualdades obtenemos una caracterización de "primer orden" de la concavidad. En resumen, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 13.1.13 (Caracterización de primer orden de la convexidad)**.** *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces*

- *f es convexa si y solo si $f(x)\geq f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)$ para cada $x,\alpha\in(a,b)$;*
- *f es cóncava si y solo si $f(x)\leq f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)$ para cada $x,\alpha\in(a,b)$.*

Ejemplo 13.1.14. *Sean $x>0$ y $\alpha>0$. La desigualdad de Napier (Ejercicio 12.1.13) asegura que, si $\alpha<x$, entonces*
$$\frac{1}{x}<\frac{\ln x-\ln\alpha}{x-\alpha}<\frac{1}{\alpha}.$$
En consecuencia, tenemos que $\ln x-\ln\alpha<\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)$, o equivalentemente, $\ln x<\ln\alpha+\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)$. A su vez, se obtiene una conclusión similar intercambiando x y α. Esto demuestra que la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x):=\ln x$ es cóncava.

Ejemplo 13.1.15. *Consideremos la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x):=x^r$, con $r\geq 1$. Dados $x>0$ y $\alpha>0$, tenemos que analizar el signo de la expresión*

$$\Delta:=f(x)-f(\alpha)-f'(\alpha)(x-\alpha)=x^r-\alpha^r-r\alpha^{r-1}(x-\alpha).$$

Supongamos en primer lugar que $x>\alpha$. Entonces, por el Teorema del valor medio (Teorema 12.1.4), tenemos que existe $c\in(\alpha,x)$ tal que

$$\Delta=(x-\alpha)\left(\frac{x^r-\alpha^r}{x-\alpha}-r\alpha^{r-1}\right)=(x-\alpha)(rc^{r-1}-r\alpha^{r-1}),$$

lo que prueba que $\Delta>0$ en este caso. Por otro lado, si $\alpha>x$, entonces

$$\Delta=(\alpha-x)\left(r\alpha^{r-1}-\frac{\alpha^r-x^r}{\alpha-x}\right)=(\alpha-x)(r\alpha^{r-1}-rc^{r-1})$$

con $c \in (x, \alpha)$, lo que muestra que $\Delta > 0$. Concluimos que f es convexa.

Ejercicio 13.1.16. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.*

1. *Demostrar que, si f es convexa, entonces*

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y) \tag{13.5}$$

   para cada $x, y \in (a,b)$ con $x < y$. (Sugerencia: aplicar (13.4) a (x,y) y a (y,x).)

2. *Recíprocamente, si vale (13.5) para cada par de puntos $x < y$ de (a,b), demostrar que f es convexa.* (Sugerencia: revertir el razonamiento del ítem anterior.)

Condiciones de segundo orden para la convexidad

Supongamos ahora que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es dos veces derivable en (a,b). Sean x y α dos puntos de (a,b). De acuerdo con la expresión explícita del error de la aproximación de Taylor de orden 1 de f en α (Teorema 12.2.25), existe $c \in \text{int}(x, \alpha)$ tal que

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{1}{2} f''(c)(x - \alpha)^2.$$

Por lo tanto, si $f''(c) \geq 0$ para cada $c \in (a,b)$, de la expresión anterior deducimos que

$$f(x) \geq f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha).$$

Así, f satisface la condición de primer orden para la convexidad, de lo cual, por el Teorema 13.1.13, concluimos que f es convexa.

Recíprocamente, si f es convexa, el Ejercicio 13.1.16 asegura que

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

para cada par de puntos $x, y \in (a,b)$ con $x < y$. De esto deducimos que la función derivada f' es creciente en (a,b), lo que implica que $f''(c) \geq 0$ para cada $c \in (a,b)$.

Invirtiendo las desigualdades obtenemos la conclusión correspondiente para funciones cóncavas. En resumen, tenemos la siguiente caracterización de "segundo orden" de la concavidad y la convexidad.

Teorema 13.1.17 (Caracterización de segundo orden de la convexidad)**.** *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en (a,b). Entonces*

- *f es convexa si y solo si $f''(c) \geq 0$ para cada $c \in (a,b)$;*
- *f es cóncava si y solo si $f''(c) \leq 0$ para cada $c \in (a,b)$.*

Ejemplo 13.1.18. *En el Ejemplo 13.1.15 hemos concluido que la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^r$ es convexa si $r \geq 1$. Estudiamos ahora el caso $0 < r \leq 1$. Observamos que f es 2 veces derivable*

y

$$f''(x) = r(r-1)x^{r-2}$$

para cada $x \in (0,+\infty)$. *Por lo tanto, si* $r \leq 1$ *vemos que* $f''(x) \leq 0$ *para cada* $x \in (0,+\infty)$, *lo que demuestra que* f *es cóncava en este caso.*

Ejercicio 13.1.19. *Demostrar que las siguientes funciones son convexas o cóncavas, según corresponda.*

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := a^x$ *es convexa para cada* $a > 0$,
- $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \log_a x$ *es cóncava si* $a \geq 1$ *y es convexa si* $0 < a \leq 1$.

Ejercicio 13.1.20. *Demostrar que* $x \geq \operatorname{sen} x \geq 2x/\pi$ *para cada* $x \in [0,\pi/2]$.

Desigualdades por medio de argumentos de convexidad

Muchas desigualdades clásicas del análisis pueden deducirse por medio de argumentos que involucran funciones cóncavas o convexas (ver, por ejemplo, [HLP34, Chapter III]). En los ejercicios que siguen vamos a considerar tres desigualdades fundamentales: la **desigualdad de la media aritmética y la media geométrica** (AM–GM, según su sigla en inglés), la **desigualdad de Hölder** y la **desigualdad de Minkowski**.

Ejercicio 13.1.21 (Desigualdad de la media aritmética y la media geométrica). *Dados reales positivos* $x_1,\ldots,x_n$, *se define su* **media aritmética** *por* $(x_1+\cdots+x_n)/n$ *y su* **media geométrica** *por* $\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$. *Demostrar que la media aritmética de* $x_1,\ldots,x_n$ *es mayor o igual que la media geométrica, es decir,*

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\ldots x_n}.$$

(Sugerencia: aplicar la desigualdad de Jensen (Ejercicio 13.1.10) a fin de demostrar que el logaritmo natural de la media aritmética es mayor o igual que el logaritmo natural de la media geométrica.)

Ejercicio 13.1.22 (Desigualdad de Hölder). *El objetivo del presente ejercicio es demostrar la* **desigualdad de Hölder**: *dados* $p,q > 1$ *con* $1/p+1/q = 1$ *y* $x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}. \tag{13.6}$$

- *Demostrar que si* $a > 0$, $b > 0$ *y* $0 \leq \theta \leq 1$, *entonces* $a^\theta b^{1-\theta} \leq \theta a + (1-\theta)b$.
- *Aplicar esta desigualdad en el caso* $a := \dfrac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p}$, $b := \dfrac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^q}$ *y* $\theta := \dfrac{1}{p}$, *y deducir que* $\left(\dfrac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p}\right)^{1/p} \left(\dfrac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^q}\right)^{1/q} \leq \dfrac{|x_i|^p}{p\sum_{j=1}^n |x_j|^p} + \dfrac{|y_i|^q}{q\sum_{j=1}^n |y_j|^q}$.
- *Sumar estas desigualdades para* $1 \leq i \leq n$ *y deducir (13.6).*

Ejercicio 13.1.23 (Desigualdad de Minkowski). *Dados $p \geq 1$ y $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$, demostrar la* **desigualdad de Minkowski**:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}.$$

(Sugerencia: si $p > 1$, usar que $|a+b|^p = |a+b|\,|a+b|^{p/q} \leq |a|\,|a+b|^{p/q} + |b|\,|a+b|^{p/q}$, siendo $q > 1$ tal que $1/p + 1/q = 1$, y aplicar la desigualdad de Hölder (13.6) a cada sumando de la última expresión.)

13.2. Puntos fijos: la iteración de punto fijo revisitada

En esta sección retomamos otro de nuestros problemas modelo: el de la determinación de los "estados de equilibrio" del "proceso de evolución" que define una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada. Más precisamente, se trata de decidir la existencia de puntos fijos de f, esto es, elementos $\alpha \in A$ tales que $f(\alpha) = \alpha$ y, a la vez, determinarlos, es decir, hallar sucesiones que converjan a los mismos.

En la Sección 8.3 hemos obtenido una condición suficiente de existencia y unicidad de puntos fijos de una función continua $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: el Teorema de punto fijo. El Teorema de punto fijo (Teorema 8.3.9) afirma que, si A es **cerrado** y $f : A \to A$ es **contractiva**, es decir, existe $0 \leq L < 1$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \tag{13.7}$$

para cada par de puntos $x, y \in A$, entonces **existe un único punto fijo** $\alpha \in A$ de f.

Más aún, la demostración de Teorema de punto fijo es constructiva, y básicamente asegura que, en las condiciones del enunciado del teorema, cualquier sucesión que corresponda a una "**iteración de punto fijo**" asociada a f **converge al punto fijo** de f. Recordamos que, partiendo de $a_0 \in A$ arbitrario, la iteración de punto fijo consiste en considerar la sucesión $(a_n)_{n>0}$ definida por $a_{n+1} := f(a_n)$ para cada $n \geq 0$.

Observamos que (13.7) establece que el incremento de f debe controlarse globalmente **de forma lineal**, de forma similar a que ocurre en el Teorema del valor medio (Teorema 12.1.4). En consecuencia, combinando el Teorema de punto fijo y el Teorema del valor medio, como hemos hecho en el análisis del punto fijo de la función $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Lema 8.3.1), obtenemos resultados de existencia de puntos fijos de funciones diferenciables, cuyo contenido es el objetivo de los dos ejercicios siguientes.

Ejercicio 13.2.1. *Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ una función continua que es derivable en (a,b) tal que $\sup_{x \in (a,b)} |f'(x)| < 1$. Demostrar que f posee un único punto fijo α en $[a,b]$ y la sucesión $(a_n)_{n>0}$, $a_{n+1} := f(a_n)$ $(n \geq 0)$ converge a α para cada $a_0 \in [a,b]$.*

Ejercicio 13.2.2. *Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ una función de clase C^1 tal que $|f'(x)| < 1$ para cada $x \in [a,b]$. Demostrar que f posee un único punto fijo α en $[a,b]$ y la sucesión $(a_n)_{n>0}$, $a_{n+1} := f(a_n)$ $(n \geq 0)$ converge a α para cada $a_0 \in [a,b]$.*

Ejercicio 13.2.3. *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada acotada. Fijemos $y_0 \in \mathbb{R}$ y consideremos la ecuación $y_0 = x + \varepsilon g(x)$, o equivalentemente,*

$$y_0 - \varepsilon g(x) = x. \tag{13.8}$$

Demostrar que, si $\varepsilon \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}} |g'(x)| < 1$, entonces (13.8) posee una única solución en $\mathbb{R}$. (Sugerencia: considerar (13.8) como un problema de punto fijo.)

13.2.1. Una condición local de convergencia

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable que tiene un punto fijo $\alpha \in (a,b)$. Queremos saber si es posible determinar α por medio de una iteración de punto fijo, es decir, se trata de determinar $a_0 \in (a,b)$ tal que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ definida por $a_{n+1} := f(a_n)$ $(n \geq 0)$ converge a α. Para esto, vamos a definir el **dominio de atracción** de α como el conjunto formado por los elementos $a_0 \in (a,b)$ a partir de los cuales la iteración de punto fijo $a_{n+1} := f(a_n)$ $(n \geq 0)$ converge a α. En particular, diremos que α es **atractivo** si existe $\varepsilon > 0$ tal que el intervalo $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ está contenido en el dominio de atracción de α. Por el contrario, diremos que α es **repulsivo** si existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $a_0 \in (a,b)$ con $0 < |a_0 - \alpha| < \varepsilon$, la sucesión $(a_n)_{n>0}$, $a_{n+1} := f(a_n)$ $(n \geq 0)$ en algún momento "sale" de $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$.

Ejemplo 13.2.4. *En el caso de la función $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de acuerdo con el Ejercicio 8.3.3, la sucesión $(a_n)_{n>0}$ definida por $a_{n+1} := \cos a_n$ converge al único punto fijo α de $\cos$ para cada $a_0 \in \mathbb{R}$. Así, el dominio de atracción de dicho punto fijo α es $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 13.2.5. *Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{4}(4 + x - x^2)$, que tiene dos puntos fijos: -4 y 1. Queremos analizar la convergencia de la sucesión $(a_n)_{n>0}$, $a_{n+1} := f(a_n)$ $(n \geq 0)$ para valores de a_0 en un entorno de -4 y de 1.*

Comenzamos analizando la convergencia de $(a_n)_{n>0}$ a -4. Tenemos que

$$|a_{n+1} + 4| = \left| \frac{1}{4}(4 + a_n - a_n^2) + 4 \right| = \frac{1}{4}|a_n^2 - a_n - 20| = \frac{1}{4}|a_n + 4||a_n - 5|.$$

En consecuencia, si $|a_n + 4| < 1$, entonces $a_n + 4 < 1$, y por lo tanto, $a_n - 5 < -8$, con lo cual resulta $|a_n - 5| > 8$. Esto implica que

$$|a_{n+1} + 4| > 2|a_n + 4|.$$

Concluimos que -4 es un punto fijo repulsivo de f, dado que, si $0 < |a_0 + 4| < 1$, en tanto se satisfaga la condición $0 < |a_m + 4| < 1$ para $0 \leq m \leq n$, tendremos que $|a_n + 4| \geq 2^n |a_0 + 4|$. Esto demuestra que necesariamente algún término a_n satisfará la condición $|a_n + 4| > 1$.

Analizamos ahora la convergencia de $(a_n)_{n>0}$ a 1. Para esto, observamos que

$$|a_{n+1} - 1| = \left| \frac{1}{4}(4 + a_n - a_n^2) - 1 \right| = \frac{1}{4}|a_n^2 - a_n| = \frac{1}{4}|a_n||a_n - 1|. \tag{13.9}$$

En consecuencia, si $|a_n - 1| < 1$, entonces $0 < a_n < 2$, y por lo tanto, $|a_n| < 2$. De esto deducimos

que $|a_{n+1}-1| < \frac{1}{2}|a_n-1|$, *y por ende, que* $(a_n)_{n>0}$ *converge a* 1 *para cada* $a_0 \in (0,2)$. *Cabe observar que podríamos haber obtenido un resultado del mismo tipo por una aplicación del Teorema de punto fijo (Teorema 8.3.9): teniendo en cuenta que* $f([0,2]) \subset [0,2]$ *y* f *es contractiva en* $[0,2]$, *ya que*

$$|f(x)-f(y)| = \frac{1}{4}|x^2-x-y^2+y| = \frac{1}{4}|x-y||x+y-1| \le \frac{3}{4}|x-y|$$

para cada $x,y \in [0,2]$, *el Teorema de punto fijo asegura que la sucesión* $(a_n)_{n>0}$ *converge a* 1 *para cada* $a_0 \in [0,2]$. *En todo caso, la conclusión es que* 1 *es un punto fijo atractivo, cuyo dominio de atracción contiene al intervalo* $[0,2]$.

Ejercicio 13.2.6. *El objetivo del presente ejercicio es demostrar que el dominio de atracción de* 1 *para la función* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{4}(4+x-x^2)$ *del ejemplo precedente es el intervalo* $(-4,5)$.

1. *Demostrar que el intervalo* $(-4,4)$ *está contenido en el dominio de atracción de* 1. (Sugerencia: usar la estimación (13.9).)
2. *Demostrar que* $f([4,5)) = (-4,-2]$ *y concluir que el intervalo* $[4,5)$ *está contenido en el dominio de atracción de* 1.
3. *Demostrar que si* $x \notin (-4,5)$, *entonces* $f(x) \le -4$. *Concluir que el dominio de atracción de* 1 *es* $(-4,5)$.

En lo que sigue, nuestro propósito es determinar condiciones que implican que un punto fijo α de una función diferenciable $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es atractivo. Dado que se trata de una condición que atañe el comportamiento **local** de una función diferenciable en torno a α, podemos utilizar una estrategia que ya hemos empleado: linealizar.

En efecto, la diferenciabilidad de f en α implica que, si x está "cerca" de α, entonces

$$f(x) \approx f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha) = \alpha+\eta(x-\alpha),$$

siendo $\eta := f'(\alpha)$. Así, a fin de tener indicios sobre el comportamiento de la iteración de punto fijo $a_{n+1} := f(a_n)$ $(n \ge 0)$, comenzando en valores de a_0 "cercanos" a α, vamos a estudiar el comportamiento de la linealización $b_{n+1} := \alpha+\eta(b_n-\alpha)$ $(n \ge 0)$ para valores de b_0 "cercanos" a α (pero distintos de α). En tal sentido, tenemos que

$$b_{n+1}-\alpha = \eta(b_n-\alpha) = \eta^2(b_{n-1}-\alpha) = \cdots = \eta^{n+1}(b_0-\alpha).$$

Concluimos que $(b_n)_{n>0}$ **converge a** α **si** $|\eta| = |f'(\alpha)| < 1$, **tiende a infinito si** $|\eta| = |f'(\alpha)| > 1$ y **no tiene un comportamiento definido si** $|\eta| = 1$.

Analizamos ahora el comportamiento de la iteración original $a_{n+1} := f(a_n)$ $(n \ge 0)$ para valores de a_n "cercanos" a α. Supongamos en primer lugar que $|f'(\alpha)| < 1$. La diferenciabilidad de f en α asegura que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\big|f(x)-f(\alpha)-f'(\alpha)(x-\alpha)\big| < \varepsilon|x-\alpha|$$

para cada $x \in (a,b)$ con $0 < |x-\alpha| < \delta$. Dado que $|f'(\alpha)| < 1$, tenemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|f'(\alpha)|+\varepsilon_0 < 1$. En consecuencia, existe $\delta_0 > 0$ tal que, para $a_n \in (a,b)$ con $0 < |a_n-\alpha| < \delta_0$,

resulta

$$\left|a_{n+1}-\alpha-f'(\alpha)(a_n-\alpha)\right|=\left|f(a_n)-f(\alpha)-f'(\alpha)(a_n-\alpha)\right|<\varepsilon_0|a_n-\alpha|,$$

y por lo tanto,

$$|a_{n+1}-\alpha|<(|f'(\alpha)|+|\varepsilon_0|)|a_n-\alpha|<|a_n-\alpha|. \tag{13.10}$$

Así, si $0<|a_0-\alpha|<\delta_0$, argumentando en forma inductiva concluimos que, o bien $a_N=\alpha$ para algún $N\in\mathbb{N}$, en cuyo caso $(a_n)_{n>0}$ converge a α, o bien $0<|a_n-\alpha|<\delta_0$ para cada $n\geq 0$. En este último caso, de (13.10) deducimos que

$$|a_{n+1}-\alpha|<(|f'(\alpha)|+|\varepsilon_0|)^{n+1}|a_0-\alpha|$$

lo cual implica que $(a_n)_{n>0}$ converge a α.

Por otro lado, si $|f'(\alpha)|>1$, un razonamiento similar al precedente muestra que α es repulsivo (ver el Ejercicio 13.2.9). En conclusión, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 13.2.7 (Clasificación de los puntos fijos). *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto fijo $\alpha\in(a,b)$. Tenemos que:*

- *si $|f'(\alpha)|<1$, entonces α es atractivo;*
- *si $|f'(\alpha)|>1$, entonces α es repulsivo.*

Ejemplo 13.2.8. *En el Ejemplo 13.2.5 hemos considerado la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=\frac{1}{4}(4+x-x^2)$, que tiene dos puntos fijos: -4 y 1. Analizando la iteración $a_{n+1}:=f(a_n)$ $(n\geq 0)$ hemos concluido que 1 es atractivo y -4 es repulsivo. Es mucho más fácil arribar a estas conclusiones utilizando nuestro resultado de clasificación de los puntos fijos de funciones diferenciables: dado que*

$$|f'(-4)|=\frac{9}{4},\quad |f'(1)|=\frac{1}{4},$$

el Teorema 13.2.7 asegura que -4 es repulsivo y 1 es atractivo.

Ejercicio 13.2.9. *Sean f y α con las hipótesis del Teorema 13.2.7, y supongamos adicionalmente que $|f'(\alpha)|>1$.*

1. *Demostrar que existen $\varepsilon>0$ y $\delta>0$ que satisfacen las siguientes condiciones: $|f'(\alpha)|-\varepsilon>1$ y, para cada $x\in(a,b)$ con $0<|x-\alpha|<\delta$, tenemos que*

$$|f(x)-f(\alpha)|>(|f'(\alpha)|-\varepsilon)|x-\alpha|.$$

2. *Concluir que si $a_0\in(a,b)$ es tal que $0<|a_0-\alpha|<\delta$ y definimos $a_{n+1}:=f(a_n)$ para cada $n\geq 0$, entonces existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $|a_N-\alpha|>\delta$.*

Ejercicio 13.2.10 (El caso $|f'(\alpha)|=1$). *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=x^2-x+1$, y consideremos la iteración $a_{n+1}:=f(a_n)$ $(n\geq 0)$.*

1. *Demostrar que si $a_0\in(0,1)$, entonces $(a_n)_{n>0}$ es creciente y acotada, y por lo tanto, converge a 1.*

2. *Demostrar que si* $a_0 > 1$, *entonces* $(a_n)_{n>0}$ *tiende a* $+\infty$.

Ejercicio 13.2.11. *Sean* f *y* α *con las hipótesis del Teorema 13.2.7, tales que* $|f'(\alpha)| < 1$. *Sea* $a_0 \in (a,b)$ *tal que la sucesión* $(a_n)_{n>0}$, $a_{n+1} := f(a_n)$ $(n \geq 0)$ *converge a* α *y* $a_n \neq \alpha$ *para cada* $n \geq 0$. *Demostrar que*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha} = f'(\alpha).$$

Ejercicio 13.2.12. *Sea* $f_\lambda : [0,1] \to [0,1]$ *la función* $f_\lambda(x) := \lambda x(1-x)$, *donde* $\lambda \in (0,4]$.

1. *Demostrar que si* $\lambda < 1$, *entonces* f_λ *es contractiva y* 0 *es el punto fijo.*

2. *Demostrar que si* $\lambda > 1$, *entonces* f_λ *tiene dos puntos fijos.*

3. *Clasificar los puntos fijos del ítem anterior para* $\lambda > 1$.

Ejercicio 13.2.13. *(Comparar con el Ejercicio 8.3.14) A fin de determinar el punto fijo* $\alpha \approx \frac{1}{2}$ *de la función* $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := -\ln x$, *se proponen las siguientes fórmulas de iteración:* $a_{n+1} := -\ln a_n$, $a_{n+1} := e^{-a_n}$, $a_{n+1} := (a_n + e^{-a_n})/2$. *¿Cuáles de estas fórmulas* **pueden** *utilizarse? ¿Cuál de estas fórmulas* **debería** *utilizarse?*

13.2.2. Orden de convergencia en la iteración de punto fijo

En la discusión sobre el Teorema de punto fijo de la Sección 8.3 hemos introducido la noción de orden de convergencia de una sucesión (Definición 8.3.15): $(a_n)_{n>0}$ converge a α con orden $p \geq 1$ si existe $L > 0$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1} - \alpha|}{|a_n - \alpha|^p} = L.$$

Como vemos del Ejercicio 13.2.11, si una sucesión $(a_n)_{n>0}$ de la forma $a_{n+1} := f(a_n)$ $(n \geq 0)$, siendo $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diferenciable, converge a un punto fijo α de f con $0 < |f'(\alpha)| < 1$, entonces lo hace con orden lineal. Por otro lado, si $f'(\alpha) = 0$, dado que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha} = f'(\alpha) = 0,$$

el orden de convergencia de $(a_n)_{n>0}$ a α es mayor que lineal. La cuestión en tal caso es cuál es el orden de convergencia. Dado que la estrategia de "linealizar" a f en un entorno de α no nos permite determinar dicho orden de convergencia, vamos a recurrir a las herramientas para el análisis del comportamiento local de f en torno a α que nos proveen los desarrollos de Taylor de f en un entorno de α.

El siguiente resultado determina el orden de convergencia de las sucesiones que produce de la iteración de punto fijo asociada a una función f varias veces derivable.

Teorema 13.2.14 (Orden de convergencia en la iteración de punto fijo). *Sea* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *una función con un punto fijo* $\alpha \in (a,b)$. *Supongamos que* f *es* k *veces derivable en* α *y satisface las condiciones*

$$f'(\alpha) = \cdots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0, \; f^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Sea $a_0 \in (a,b)$ tal que la sucesión $(a_n)_{n>0}$, $a_{n+1} := f(a_n)$, está bien definida, $a_n \neq \alpha$ para cada $n \geq 0$, y converge a α. Entonces $(a_n)_{n>0}$ converge con orden k.

Demostración. Dado que $f'(\alpha) = \cdots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0$, el polinomio de Taylor p_k de f de orden k en α es

$$p_k(x) = f(\alpha) + \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k.$$

Sea $r_k : (a,b) \to \mathbb{R}$, $r_k(x) := f(x) - p_k(x)$. Tenemos que $f(a_n) = p_k(a_n) + r_k(a_n)$, de lo que deducimos que

$$|a_{n+1} - \alpha| = |f(a_n) - f(\alpha)| = \left| \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(a_n - \alpha)^k + r(a_n) \right|.$$

Dado que $a_n \neq \alpha$, dividiendo esta identidad por $|a_n - \alpha|^k$ resulta

$$\frac{|a_{n+1} - \alpha|}{|a_n - \alpha|^k} = \left| \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} + \frac{r(a_n)}{(a_n - \alpha)^k} \right|.$$

El Teorema de Taylor (Teorema 12.2.14) asegura que $\lim_{x\to\alpha} r(x)/(x-\alpha)^k = 0$. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α, vemos que $\lim_{n\to\infty} |r(a_n)|/|a_n - \alpha|^k = 0$, y por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} - \alpha|}{|a_n - \alpha|^k} = \frac{|f^{(k)}(\alpha)|}{k!} \neq 0.$$

Esto demuestra que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α con orden k. □

Ejemplo 13.2.15 (Método de Halley). *Un conocido método para resolver una ecuación $f(x) = 0$ en forma aproximada es el* **método de Halley**. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es una raíz de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^3, el método de Halley consiste en considerar, comenzando en una aproximación inicial a_0 de α, la sucesión $(a_n)_{n>0}$ definida por*

$$a_{n+1} := a_n - \frac{f(a_n)f'(a_n)}{f'(a_n)^2 - f(a_n)f''(a_n)/2} \quad (n \geq 0) \tag{13.11}$$

(ver [ST95] por una derivación geométrica del método de Halley y una demostración de que el método de Halley tiene orden de convergencia cúbico).

En este ejemplo vamos a demostrar que la aplicación del método de Halley a la ecuación $x^3 = a$ para $a \in \mathbb{R}$ fijo tiene orden de convergencia cúbico. Para esto, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función $f(x) := x^3 - a$, entonces (13.11) toma la forma

$$a_{n+1} := a_n - \frac{(a_n^3 - a)(3a_n^2)}{(3a_n^2)^2 - (a_n^3 - a)(6a_n)/2} = \frac{a_n(a_n^3 + 2a)}{2a_n^3 + a}. \tag{13.12}$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $a > 0$ y sea $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función

$$g(x) := \frac{x(x^3 + 2a)}{2x^3 + a}.$$

Entonces (13.12) resulta de hecho la iteración de punto fijo definida por

$$a_{n+1} := g(a_n) \quad (n \geq 0).$$

Supongamos que, para cierto $a_0 > 0$*, la sucesión* $(a_n)_{n\geq 0}$ *de (13.12) converge a* $\sqrt[3]{a}$*. A fin de determinar el orden de convergencia de dicha sucesión, de acuerdo con el resultado sobre el orden de convergencia de la iteración de punto fijo (Teorema 13.2.14) es necesario analizar cuántas derivadas sucesivas de* g *se anulan en* $\sqrt[3]{a}$*. Tenemos que*

$$g'(x) = \frac{2(x^3-a)^2}{(2x^3+a)^2}, \; g''(x) = \frac{36ax^2(x^3-a)}{(2x^3+a)^3}, \; g'''(x) = \frac{-36ax(8x^6-19ax^3+2a^2)}{(2x^3+a)^4}.$$

De la expresión explícita de las derivadas sucesivas de g *vemos que*

$$g'(\sqrt[3]{a}) = g''(\sqrt[3]{a}) = 0, \; g'''(\sqrt[3]{a}) = 4\sqrt[3]{a} \neq 0.$$

De esto concluimos que, si $(a_n)_{n>0}$ *converge, converge a* $\sqrt[3]{a}$ *con orden cúbico.*

Ejercicio 13.2.16 (Método de Steffensen). *Otro método para resolver una ecuación* $f(x) = 0$ *en forma aproximada es el* **método de Steffensen**. *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *es una raíz de una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de clase* C^2 *y* a_0 *es una aproximación inicial a* α*, el método de Steffensen consiste en producir la sucesión* $(a_n)_{n>0}$ *definida por*

$$a_{n+1} := a_n - \frac{f(a_n)}{g(a_n)}, \quad g(a_n) := \frac{f(a_n + f(a_n)) - f(a_n)}{f(a_n)}. \tag{13.13}$$

1. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) := x^3 - a$*. Expresar (13.13) en la forma* $a_{n+1} = h(a_n)$ $(n \geq 0)$ *para una función* h *adecuada.*

2. *Demostrar que, si converge, la sucesión* $(a_n)_{n>0}$ *converge a* $\sqrt[3]{a}$*.*

3. *Demostrar que, si* $(a_n)_{n>0}$ *converge, entonces, bajo hipótesis adecuadas, lo hace con orden cuadrático.*

Como hemos visto, el resultado sobre el orden de convergencia de una iteración de punto fijo (Teorema 13.2.14) asegura que, si converge, el orden de convergencia de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forma $a_{n+1} := f(a_n)$ $(n \geq 0)$ depende directamente de la cantidad de derivadas de f que se anulan en el punto fijo α de f al que $(a_n)_{n>0}$ converge. En consecuencia, si se trata de aproximar un punto fijo $\alpha \in \mathbb{R}$ de varias funciones, a efectos de obtener la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la iteración de punto fijo con mayor "velocidad" de convergencia a α es conveniente que la sucesión considerada sea la correspondiente a la función para la cual **la mayor cantidad de derivadas posibles se anulen en** α. Por ejemplo, a efectos de aproximar $\sqrt[3]{a}$ es preferible utilizar la iteración del método de Halley (Ejemplo 13.2.15) que la del método de Steffensen (Ejercicio 13.2.16).

13.3. Resolución de ecuaciones: el método de Newton

El último de los problemas modelo que vamos a considerar en este capítulo es el de la resolución de ecuaciones definidas por medio de funciones diferenciables. En tal sentido, vamos a discutir el **método de Newton**, que ya hemos considerado a efectos de resolver ecuaciones polinomiales (Sección 7.4.2). Dado que la deducción del método de Newton en este contexto general es muy similar a la correspondiente para ecuaciones polinomiales, la recordamos brevemente. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función diferenciable con un cero **simple** $\alpha\in(a,b)$, es decir, un cero α tal que $f'(\alpha)\neq 0$. Dada una aproximación a de α, para valores de x "cercanos" a a tenemos que $f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$, por lo que el cero α de f debería estar "cerca" del cero de la función lineal $x\mapsto f(a)+f'(a)(x-a)$, es decir, $b:=a-f(a)/f'(a)$. Por lo tanto, sería de esperar que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_{n+1}:=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}\quad (n\geq 0)$$

converja al cero α de f en consideración. Ésta es la **sucesión del método de Newton** aplicado a la ecuación $f(x)=0$.

Observamos que, si definimos $g(x):=x-f(x)/f'(x)$, entonces la sucesión del método de Newton es la iteración de punto fijo $a_{n+1}:=g(a_n)$. Así **reducimos** el problema de resolver la ecuación $f(x)=0$ al de determinar puntos fijos de g. En particular, si la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton converge a $\alpha\in\mathbb{R}$, debe ser $f'(\alpha)g(\alpha)-f'(\alpha)\alpha=f(\alpha)$, y por lo tanto, $f(\alpha)=0$.

Ahora bien, cabe preguntarse por qué el método de Newton es una "buena" reducción, habida cuenta de que existen diversas reducciones (los métodos de Halley del Ejemplo 13.2.15 y de Steffensen del Ejercicio 13.2.16 son ejemplos en tal sentido). La respuesta se explica en términos de **orden de convergencia**: es un método "simple" (más simple que los métodos de Halley y Steffensen) cuyo **orden de convergencia es cuadrático**.

13.3.1. El orden de convergencia del método de Newton

A fin de determinar el orden de convergencia del método de Newton, dado que se trata de una iteración de punto fijo, podemos aplicar el resultado sobre el orden de convergencia de tales iteraciones (Teorema 13.2.14). En efecto, dada una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $f(\alpha)=0$ y $f'(\alpha)\neq 0$ para cierto $\alpha\in(a,b)$, **supongamos que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton converge a α**, comenzando en $a_0\in(a,b)$. Si $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ es la función definida por $g(x):=x-f(x)/f'(x)$ (que suponemos bien definida en (a,b)), tenemos que determinar cuántas derivadas de g se anulan en α. Para esto, tenemos que

$$g'(x)=1-\frac{f'(x)^2-f(x)f''(x)}{f'(x)^2}=\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

En consecuencia, dado que $f(\alpha)=0$ y $f'(\alpha)\neq 0$ por hipótesis, concluimos que $g'(\alpha)=0$. Aplicando el resultado sobre el orden de convergencia de la iteración de punto fijo (Teorema 13.2.14), obtenemos el siguiente resultado.

Lema 13.3.1. *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que $f'(x)\neq 0$ para cada $x\in(a,b)$. Sea $\alpha\in(a,b)$ tal que $f(\alpha)=0$ y supongamos que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton está bien definida y converge a α para cierto $a_0\in(a,b)$. Entonces $(a_n)_{n>0}$ converge con orden al menos cuadrático.*

Ejercicio 13.3.2 (El método de Newton para raíces dobles)**.** *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función de clase C^2 en (a,b) que tiene una raíz doble en un punto $\alpha\in(a,b)$, tal que $f'(x)\neq 0$ para cada $x\in(a,b)\setminus\{\alpha\}$.*

1. *Demostrar que, si la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton converge a α, lo hace con orden lineal.* (Sugerencia: estudiar $\lim_{x\to\alpha} g'(x)$.)

2. *Sea $(b_n)_{n>0}$ la sucesión definida por $b_{n+1}=b_n-2f(b_n)/f'(b_n)$ para cada $n\geq 0$. Demostrar que, si $(b_n)_{n>0}$ converge a α, lo hace con orden al menos cuadrático.*

13.3.2. Convergencia local del método de Newton

En la discusión de la sección precedente partimos de suponer la convergencia de la sucesión correspondiente. En esta sección nos proponemos establecer condiciones sobre a_0 que garanticen que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton, comenzando en a_0, converge a una raíz de la función en consideración con orden al menos cuadrático.

Para esto, sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función de clase C^2 en (a,b) tal que existe $\alpha\in(a,b)$ con $f(\alpha)=0$ y $f'(\alpha)\neq 0$. Sea $a_0\in(a,b)$. Si $f'(a_0)\neq 0$ y $a_1:=a_0-f(a_0)/f'(a_0)$, queremos determinar el error $a_1-\alpha$ en función de $a_0-\alpha$. Tenemos que

$$\begin{aligned} a_1-\alpha=a_0-\alpha-\frac{f(a_0)}{f'(a_0)} &= \frac{1}{f'(a_0)}\big(-f(a_0)+f'(a_0)(a_0-\alpha)\big)\\ &= \frac{1}{f'(a_0)}\big(f(\alpha)-f(a_0)-f'(a_0)(\alpha-a_0)\big). \end{aligned}$$

Podemos ver a la expresión entre paréntesis en la segunda línea como el desarrollo de Taylor de la “función” $f(\alpha)$ en torno a a_0. En consecuencia, por la expresión explícita del error del desarrollo de Taylor (Teorema 12.2.25) concluimos que existe c_0 en el intervalo $\mathrm{int}(a_0,\alpha)$ definido por a_0 y α tal que

$$a_1-\alpha=\frac{f''(c_0)}{2f'(a_0)}(a_0-\alpha)^2. \tag{13.14}$$

Esta expresión es clave a fin de determinar condiciones sobre a_0 que garanticen que a_1 está bien definido y resulta una mejor aproximación de α que a_0 (comparar con (7.20) para ecuaciones polinomiales). Dado que queremos que $a_1-\alpha$ sea “chico”, necesitamos controlar inferiormente $|f'(a_0)|$ y superiormente $|f''(c_0)|$. Supongamos entonces que la función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ satisface las estimaciones:

(A) existe $\rho>0$ tal que $|f'(x)|\geq\rho$ para cada $x\in(a,b)$,

(B) existe $\gamma>0$ tal que $|f''(x)|\leq\gamma$ para cada $x\in(a,b)$.

En tal caso, de (13.14) deducimos que a_1 está bien definido y

$$|a_1-\alpha| \leq \frac{\gamma}{2\rho}|a_0-\alpha|^2.$$

Asimismo, queremos que a_1 pertenezca al intervalo (a,b) y $|a_1-\alpha|$ sea menor que $|a_0-\alpha|$, para lo cual pedimos que se satisfagan las siguientes condiciones:

(C) si $\eta := |a_0-\alpha|$, entonces $[\alpha-\eta,\alpha+\eta] \subset (a,b)$,

(D) $|a_0-\alpha| \leq \frac{\rho}{\gamma}$.

Estas dos condiciones aseguran que $a_1 \in (a,b)$ y $|a_1-\alpha| \leq \frac{1}{2}|a_0-\alpha|$. En efecto,

$$|a_1-\alpha| \leq \frac{\gamma}{2\rho}|a_0-\alpha|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\rho}|a_0-\alpha|\right)|a_0-\alpha| \leq \frac{1}{2}|a_0-\alpha|.$$

Concluimos que $|a_1-\alpha| \leq \eta$, de lo cual, por (C), resulta $a_1 \in (a,b)$. Además, tenemos

$$|a_1-\alpha| \leq |a_0-\alpha| \leq \frac{\rho}{\gamma}.$$

En otras palabras, a_1 está bien definido y satisface las condiciones (C) y (D).

Si aplicamos estos argumentos inductivamente, concluimos que la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton, comenzando en a_0, está bien definida y satisface la condición

$$|a_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|a_n-\alpha|$$

para cada $n \geq 0$. Esto muestra que $(|a_n-\alpha|)_{n>0}$ converge a 0, es decir, que $(a_n)_{n>0}$ converge a α. En consecuencia, tenemos que $(a_n)_{n>0}$ converge con orden al menos cuadrático (Lema 13.3.1). Así, hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 13.3.3 (Convergencia local del método de Newton)**.** *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función de clase C^2 que satisface las condiciones* (A) *y* (B)*. Sea $\alpha \in (a,b)$ con $f(\alpha)=0$ y $a_0 \in (a,b)$ que satisface las condiciones* (C) *y* (D)*. Entonces la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton, comenzando en a_0, converge a α con orden al menos cuadrático.*

Ejemplo 13.3.4. *Si bien el resultado precedente de convergencia local no es efectivo, en el sentido de que no nos permite deducir condiciones explícitas de convergencia para una función dada, nos ofrece una "guía" sobre cómo obtenerlas.*

A fin de ilustrar estas ideas, consideramos la ecuación $x\ln x = 1$. Si $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ es la función $f(x) := x\ln x - 1$, es fácil ver que $f(1)\cdot f(2)<0$, f' es positiva en $(e^{-1},+\infty)$ y creciente, y f'' es positiva y decreciente. De esto fácilmente deducimos que $1 \leq f'(x)$ y $0 \leq f''(x) \leq 1$ para cada $x \in [1,2]$. Por último, la función $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x) := x - f(x)/f'(x)$ está bien definida y $g([1,2]) \subset [1,2]$. Concluimos que, si $a_0 \in [1,2]$, la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton está bien definida. Argumentando como en el Teorema 13.3.3 vemos que, si $\alpha \in (1,2)$ es la solución de $x\ln x = 1$, entonces $|a_{n+1}-\alpha| \leq 2^{-1}|a_n-\alpha|^2$ para cada $n \geq 0$. Esto muestra que $(a_n)_{n>0}$ converge a α con orden cuadrático.

Ejercicio 13.3.5. *Analizar la convergencia de la sucesión $(a_n)_{n>0}$ del método de Newton, comenzando en $a_0 \in (1,2)$, a fin de resolver la ecuación $x = 2 - e^{-2x}$.*

Ejercicio 13.3.6. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 que tiene una raíz doble en un punto $\alpha \in (a,b)$. Supongamos además que $f(x) \neq 0$ para cada $x \in (a,b) \setminus \{\alpha\}$.*

1. *Demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $0 < |x-\alpha| < \varepsilon$, entonces*

$$\frac{|f'(x) - f'(\alpha)|}{|x-\alpha|} > \frac{3}{4}|f''(\alpha)| \quad y \quad \frac{|f''(x)|}{|f''(\alpha)|} < \frac{4}{3}.$$

2. *Demostrar que si $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon) \subset (a,b)$ y $a_0 \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$, entonces la sucesión $(a_n)_{n>1}$ del método de Newton, comenzando en a_0, converge a α.*

Ejercicio 13.3.7. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 que tiene una raíz doble en un punto $\alpha \in (a,b)$. Supongamos además que $f(x) \neq 0$ para cada $x \in (a,b) \setminus \{\alpha\}$.*

Sea $(b_n)_{n>1}$ la sucesión definida por $b_{n+1} = b_n - 2f(b_n)/f'(b_n)$ para cada $n \geq 0$.

1. *Si $b_0 \neq \alpha$, demostrar que existe $c_0 \in \operatorname{int}(b_0, \alpha)$ tal que*

$$b_0 - \alpha - 2\frac{f(b_0)}{f'(b_0)} = \frac{-f'(c_0) + f''(c_0)(c_0-\alpha)}{f''(c_0)}.$$

2. *Demostrar que existe $d_0 \in \operatorname{int}(c_0, \alpha) \subset \operatorname{int}(b_0, \alpha)$ tal que*

$$b_0 - \alpha - 2\frac{f(b_0)}{f'(b_0)} = \frac{-f'''(d_0)(d_0-\alpha)^2}{f''(c_0)}.$$

3. *Concluir que existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $b_0 \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$, entonces la sucesión $(b_n)_{n>0}$, comenzando en b_0, converge a α.*

13.3.3. La convergencia global para funciones convexas

El teorema precedente es un resultado de **convergencia local**: la sucesión del método de Newton converge cuadráticamente a un cero simple α de una función **siempre que comience "suficientemente cerca"** de α. Desafortunadamente, es sumamente complicado determinar si un punto a_0 dado está "suficientemente cerca" de α como para que la correspondiente sucesión converga. Sin embargo, como vamos a ver, en ciertos casos es posible obtener resultados de convergencia global (comparar con el Teorema 7.4.18).

Teorema 13.3.8 (El método de Newton para funciones convexas)**.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Si $f'(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, f es convexa en $\mathbb{R}$ y tiene un cero $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión del método de Newton converge a α para todo $a_0 \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $a_0 \geq \alpha$ y sea $(a_n)_{n>0}$ la correspondiente sucesión del método de Newton. Argumentando por inducción en n, afirmamos que, si $e_n := a_n - \alpha$

para cada $n \geq 0$, entonces $e_n \geq e_{n+1} \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si $a_n \geq \alpha$, dado que f es estrictamente creciente, resulta $f(a_n) \geq f(\alpha) = 0$ y $f'(a_n) > 0$. En consecuencia,

$$e_{n+1} = a_{n+1} - \alpha = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} - \alpha = e_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \leq e_n.$$

Por otro lado, de acuerdo a (13.14) tenemos la siguiente expresión del error

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(c_n)}{f'(a_n)} e_n^2. \tag{13.15}$$

Dado que $f''(c_n) \geq 0$, ya que f es convexa (Teorema 13.1.17), y $f'(a_n) > 0$, concluimos que $e_{n+1} \geq 0$. Así, la sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente, de lo que concluimos que converge. Esto a su vez implica que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, y por ende, que converge a un cero β de f. Como f es una función estrictamente creciente, su único cero es α, y por lo tanto $\beta = \alpha$, como queríamos demostrar.

Supongamos por último que $a_0 < \alpha$. Entonces, por (13.15), resulta $e_1 \geq 0$, y por lo tanto, $a_1 \geq \alpha$. Por lo tanto, podemos aplicar el razonamiento del caso $a_0 \geq \alpha$ y concluir que la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ converge a α. □

Ejercicio 13.3.9. *Para la ecuación $x \ln x = 1$ del Ejemplo 13.3.4, demostrar que la sucesión del método de Newton $(a_n)_{n\geq 0}$ de dicho ejemplo converge a la única solución α de dicha ecuación para cada $a_0 \geq \alpha$.*

14. Integración definida I: funciones continuas

El cálculo del área de una figura plana es un problema fundamental de la matemática, con importantes aplicaciones. En los próximos tres capítulos vamos a discutir el problema del cálculo del área de figuras planas determinadas por el gráfico de una función.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos para simplificar que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ y consideremos el conjunto

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Nos proponemos discutir una noción de área de A, partiendo de suponer que podemos determinar el área de rectángulos. Para esto, dando por válida la aditividad de las áreas (es decir, el área de la unión de dos figuras cuyos interiores no se intersecan es la suma de las áreas correspondientes), consideramos uniones de rectángulos que "aproximan" a A en algún sentido. Dado que el conjunto A es suficientemente "regular", vamos a ver que el área de estas uniones se aproxima, cuando "refinamos" estas uniones de rectángulos subdividiendo la base de cada rectángulo y ajustando su altura convenientemente, a un valor común, que denominamos el área de A.

Por la forma particular de A, basta considerar uniones de rectángulos $\cup_{i=1}^{n} R_i$ del tipo

$$R_i := [x_{i-1}, x_i] \times [0, \eta_i] \quad (1 \leq i \leq n),$$

siendo $a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_n := b$ y $\eta_i := f(\xi_i)$, donde ξ_i es un punto arbitrario del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $1 \leq i \leq n$ (ver la Figura 14.1).

Más generalmente, dada una función f no necesariamente positiva en $[a,b]$, a fin de obtener una extensión a la vez operativa y significativa de la noción de "área", vamos a considerar como "positiva" el área de los rectángulos R_i contenidos en $\mathbb{R}^2 \cap \{y \geq 0\}$, y "negativa" el área de los rectángulos R_i contenidos en $\mathbb{R}^2 \cap \{y \leq 0\}$. Con esta extensión de la noción de área de un rectángulo R_i, que vamos a denominar la **integral definida** de R_i, la suma de las integrales definidas de los rectángulos

$$R_i := [x_{i-1}, x_i] \times [\eta_i, 0] \ \text{ o } \ R_i := [x_{i-1}, x_i] \times [0, \eta_i]$$

(según sea $\eta_i < 0$ o $\eta_i \geq 0$ respectivamente), como en el párrafo anterior, nos conduce a la noción de **integral definida de una función continua** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en el intervalo $[a,b]$, que desarrollamos a continuación.

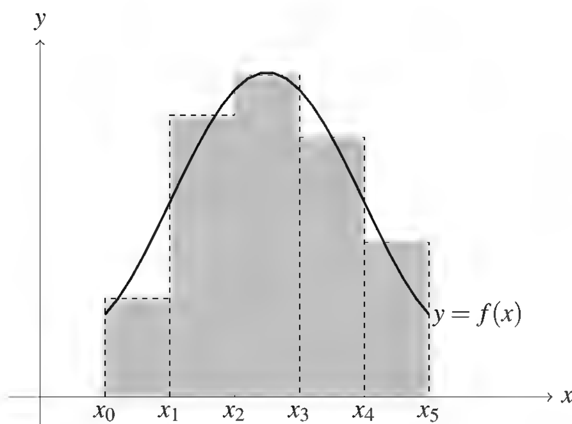


Figura 14.1.: La suma de Riemann de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ asociada a una partición P compuesta por los puntos $x_0 := a$, x_1, x_2, x_3, x_4 y $x_5 := b$.

14.1. Integración de funciones continuas

En primer lugar, es necesario definir con cuidado cuáles uniones de rectángulos vamos a considerar y qué significa “refinar” una unión de rectángulos dada.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Las uniones de rectángulos que vamos a considerar están definidas en términos de una **partición** del intervalo $[a,b]$, esto es, un subconjunto finito $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a,b]$ tal que $a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_n := b$. Dada una partición $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a,b]$ y una n–upla $\Xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de modo tal que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para $1 \leq i \leq n$, tenemos asociada la **suma de Riemann**

$$S(f,P,\Xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

donde $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ representa la longitud del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $1 \leq i \leq n$. A fin de fijar terminología, diremos que $\Xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ es **una elección de puntos de** $[a,b]$ **para** P si $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para $1 \leq i \leq n$. Observamos que la suma de Riemann $S(f,P,\Xi)$ resulta la suma de la integral definida de cada uno de los rectángulos $R_i := [x_{i-1}, x_i] \times \mathrm{int}(0, f(\xi_i))$, donde $\mathrm{int}(0, f(\xi_i))$ es el intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ cuyos extremos son 0 y $f(\xi_i)$.

En lo que sigue, a fin de simplificar la discusión del concepto de integral definida de una función continua, dada una partición $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a,b]$, vamos a considerar la suma de Riemann que define una **elección particular** Ξ **de puntos de** $[a,b]$ **para** P: la que consiste en elegir el **punto izquierdo** x_{i-1} de cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (ver la Figura 14.2). Así obtenemos la siguiente suma de Riemann $L(f,P)$ asociada a P:

$$L(f,P) := \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i.$$

Estas sumas fueron consideradas por Cauchy, por lo que vamos a denominarlas **sumas de Cauchy**.

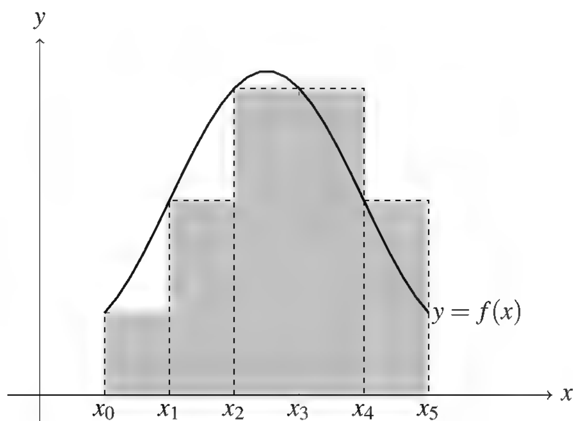


Figura 14.2.: La suma de Cauchy de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ asociada a una partición P compuesta por los puntos $x_0 := a, x_1, x_2, x_3, x_4$ y $x_5 := b$.

Ejemplo 14.1.1. *Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) := x^2$ y sea $P_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ la partición de $[0,2]$ definida por $x_i := 2i/n$ $(0 \le i \le n)$. Así, la partición P_n divide al intervalo $[0,2]$ en n intervalos $J_i := \big[2(i-1)/n, 2i/n\big]$ $(1 \le i \le n)$ de longitud $2/n$. Tenemos entonces que la suma de Cauchy $L(f,P_n)$ está definida por*

$$L(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2(i-1)}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2.$$

Teniendo en cuenta la identidad $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, vemos que

$$L(f,P_n) = \frac{8}{n^3}\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{4(2n^2-3n+1)}{3n^2}.$$

Es de esperar que, si la partición P es "suficientemente fina", la suma de Cauchy $L(f,P)$ resulte una "buena aproximación" del área determinada por f en $[a,b]$. Vamos a "medir" la "finura" de una partición $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ por medio de su **norma** ΔP, que definimos como la longitud del mayor de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ que determina P, esto es,

$$\Delta P := \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i = \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}).$$

14.1.1. Diferencias de sumas de Cauchy

En el proceso de obtener aproximaciones cada vez más precisas de la integral definida de una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, si una partición P de $[a,b]$ no es suficientemente fina, será necesario "refinarla", considerando otra partición Q que subdivida los intervalos que define P. En tal

sentido, dadas dos particiones P, Q del intervalo $[a,b]$, diremos que Q **refina a** P si $P \subset Q$. En tal caso, esperamos que la suma de Cauchy $L(f,Q)$ provea una "mejor aproximación" que $L(f,P)$ de la integral definida de f en $[a,b]$.

Tratándose de aproximar la integral definida de f en $[a,b]$, podemos considerar sucesiones de particiones cuya norma tienda a 0. Sea entonces $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones tal que $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$. La idea es que la sucesión de sumas de Cauchy $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la integral definida de f en $[a,b]$.

Ejemplo 14.1.2 (Continuación del Ejemplo 14.1.1). *Sean $n \in \mathbb{N}$ y consideremos nuevamente la suma de Cauchy $L(f,P_n)$ de la función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ asociada a la partición $P_n := \{x_0,\dots,x_n\}$ definida por $x_i := 2i/n$ $(0 \le i \le n)$. Hemos visto que $L(f,P_n) = 4(2n^2-3n+1)/3n^2$. Observamos que $\Delta P_n = 2/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$. En consecuencia, sería de esperar que el límite de la sucesión $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converja a la integral de f en $[0,2]$, esto es, que valga la identidad*

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{4(2n^2-3n+1)}{3n^2} = \frac{8}{3}.$$

A fin de determinar si una sucesión de sumas de Cauchy $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface la condición $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$ converge a la integral definida de f en $[a,b]$ vamos a estudiar el comportamiento de la sucesión $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Es conveniente realizar este estudio **sin hacer referencia al límite** de $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$, dado que "no lo conocemos". En capítulos anteriores hemos considerado situaciones de este tipo, en las cuales la convergencia de la sucesión en cuestión se establecía mostrando que se trataba de una sucesión de Cauchy. Acá vamos a proceder de la misma manera, demostrando que $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, lo que requiere analizar el comportamiento de una diferencia del tipo

$$|L(f,P_n) - L(f,P_m)|. \tag{14.1}$$

Vamos a estimar esta diferencia en términos del **módulo de continuidad** de f en $[a,b]$ (ver la Sección 10.3.1). Recordamos que el módulo de continuidad de una función (uniformemente) continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es la función $\omega(f) : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\omega(f;\delta) := \max\{|f(x)-f(y) : x,y \in [a,b],\ |x-y| \le \delta\}.$$

Las tres propiedades que vamos a utilizar son las siguientes (ver el Ejercicio 10.3.10):

- $\omega(f)$ es continua en 0,
- $\omega(f)$ es una función creciente y acotada.

El primer paso es estimar (14.1) en el caso de dos sumas de Cauchy con $P \subset Q$.

Proposición 14.1.3. *Si P, Q son dos particiones de $[a,b]$ tales que $P \subset Q$, entonces $|L(f,P) - L(f,Q)| \le \omega(f;\Delta P)(b-a)$.*

Demostración. Supongamos, para fijar ideas, que $P = \{x_0, x_n\}$ y $Q = P \cup \{x_1,\dots,x_{n-1}\}$ con $a =:$

$x_0 < x_1 < \cdots < x_n := b$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|L(f,Q)-L(f,P)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i - f(a)(b-a)\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(a)\Delta x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|f(x_{i-1})-f(a)|\Delta x_i.\end{aligned}$$

Dado que los puntos x_{i-1} $(1 \leq i \leq n)$ y a pertenecen al intervalo $[a,b]$, tenemos que $|f(x_{i-1}) - f(a)| \leq \omega(f;b-a)$ para $1 \leq i \leq n$. En consecuencia,

$$|L(f,Q)-L(f,P)| \leq \sum_{i=1}^{n} \omega(f;b-a)\Delta x_i = \omega(f;b-a)(b-a). \tag{14.2}$$

Supongamos ahora que $\#(Q) - \#(P) = m$ y sea $Q \setminus P = \{r_1,\ldots,r_m\}$. Sea $[x_{i-1},x_i]$ el primero de los intervalos que define P que resulta subdividido por Q, y supongamos que $x_{i-1} < r_1 < \ldots < r_{j-1} < x_i < r_j$, de forma tal que el intervalo $[x_{i-1},x_i]$ resulta subdividido por Q en la forma $[x_{i-1},x_i] = [x_{i-1},r_1] \cup [r_1,r_2] \cup \cdots \cup [r_{j-1},x_i]$. Cuando estimamos la diferencia entre el sumando $f(x_{i-1})\Delta x_i$ en $L(f,P)$ y la suma $\sum_{k=1}^{j} f(r_{k-1})\Delta r_k$ en $L(f,Q)$ (llamando $r_0 := x_{i-1}$ y $r_j := x_i$), dado que los puntos x_{i-1}, r_{k-1} $(1 \leq k \leq j)$ pertenecen al intervalo $[x_{i-1},x_i]$, aplicando (14.2) en el intervalo $[x_{i-1},x_i]$ vemos que

$$\left|f(x_{i-1})\Delta x_i - \sum_{k=1}^{j} f(r_{k-1})\Delta r_k\right| \leq \omega(f;\Delta x_i)\Delta x_i.$$

Argumentando de esta manera en cada intervalo $[x_{i-1},x_i]$ tenemos que

$$|L(f,Q)-L(f,P)| \leq \sum_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta x_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta P)\Delta x_i = \omega(f;\Delta P)(b-a).$$

Esto completa la demostración. □

Ahora podemos pasar a estudiar la diferencia entre dos sumas de Cauchy arbitrarias.

Corolario 14.1.4. *Si P y Q son dos particiones de $[a,b]$, entonces*

$$|L(f,P)-L(f,Q)| \leq 2\omega(f;\text{máx}\{\Delta P,\Delta Q\})(b-a).$$

Demostración. Observamos que $P \cup Q$ es una partición de $[a,b]$ que refina tanto a P como a Q. En consecuencia, de acuerdo con la proposición anterior tenemos que

$$\begin{aligned}|L(f,P)-L(f,Q)| &\leq |L(f,P)-L(f,P\cup Q)| + |L(f,P\cup Q)-L(f,Q)| \\ &\leq \omega(f;\Delta P)(b-a) + \omega(f;\Delta Q)(b-a).\end{aligned}$$

Por la monotonía de $\omega(f)$ vemos que resulta $\omega(f;\Delta P) \leq \omega(f;\text{máx}\{\Delta P,\Delta Q\})$ y $\omega(f;\Delta Q) \leq \omega(f;\text{máx}\{\Delta P,\Delta Q\})$. Combinando estas desigualdades deducimos el corolario. □

Ejemplo 14.1.5 (Continuación del Ejemplo 14.1.1)**.** *Consideremos nuevamente las sumas de*

Cauchy $L(f,P_n)$ *correspondientes a la función* $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x):=x^2$ *y la partición* $P_n:=\{x_0,\dots,x_n\}$ *definida por* $x_i:=2i/n$ $(0\le i\le n)$. *Fijemos* $n,m\in\mathbb{N}$ *y estudiemos la diferencia entre las correspondientes sumas de Cauchy. Tenemos que*

$$L(f,P_m)-L(f,P_n)=\frac{4(2m^2-3m+1)}{3m^2}-\frac{4(2n^2-3n+1)}{3n^2}=\frac{4(3mn-m-n)(m-n)}{3m^2n^2}. \quad (14.3)$$

Argumentando como cuando determinamos el módulo de continuidad de f *en* $[0,1]$ *(Ejemplo 10.3.8) es fácil ver que, si* $\delta\le 2$, *entonces* $\omega(f,\delta)=(4-\delta)\delta$. *Supongamos sin pérdida de generalidad que* $m\ge n$. *Dado que* $\Delta P_m=2/m$ *y* $\Delta P_n=2/n$, *tenemos que*

$$2\omega(f,\text{máx}\{\Delta P_m,\Delta P_n\})(2-0)=2\left(4-\frac{2}{n}\right)\frac{2}{n}(2-0)=16\frac{2n-1}{n^2}. \quad (14.4)$$

Comparando (14.3) y (14.4) concluimos que

$$|L(f,P_m)-L(f,P_n)|\le\frac{4m}{mn}\le 16\frac{2n-1}{n^2}=2\omega(f,\text{máx}\{\Delta P_m,\Delta P_n\})(2-0),$$

es decir, nuestra estimación de la diferencia de dos sumas de Cauchy (Corolario 14.1.4) se satisface en este caso.

Sumas inferiores y superiores

Una forma de estimar el valor absoluto de la diferencia entre las sumas de Cauchy de una función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ asociadas a dos particiones dadas es por medio de aproximaciones por "defecto" y por "exceso".

Sea $P:=\{x_0,\dots,x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Una forma simple de obtener estimaciones por "defecto" es elegir cada punto ξ_i como el mínimo de f en $[x_{i-1},x_i]$ para $1\le i\le n$. De esta manera, obtenemos la **suma inferior** $s(f,P)$ asociada a la partición P, esto es, la suma de Riemann

$$s(f,P):=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,$$

donde $m_i:=\text{mín}\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}$ para $1\le i\le n$. Análogamente, si elegimos ξ_i como el máximo de f en $[x_{i-1},x_i]$ obtenemos la **suma superior** $S(f,P)$, definida por

$$S(f,P):=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,$$

siendo $M_i:=\text{máx}\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}$ para $1\le i\le n$ (ver la Figura 14.3).

Estos dos números tienen "buenas" propiedades matemáticas, pero malas propiedades desde el punto de vista computacional: requieren el cálculo del mínimo m_i y el máximo M_i para $1\le i\le n$. Podemos sin embargo estimar el área determinada por f en $[a,b]$ por medio de la suma inferior y la suma superior asociadas a una partición dada, como pedimos demostrar a continuación.

Ejercicio 14.1.6. *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *una función continua y sea* P *una partición de* $[a,b]$.

1. *Demostrar que* $s(f,P)\le L(f,P)\le S(f,P)$.

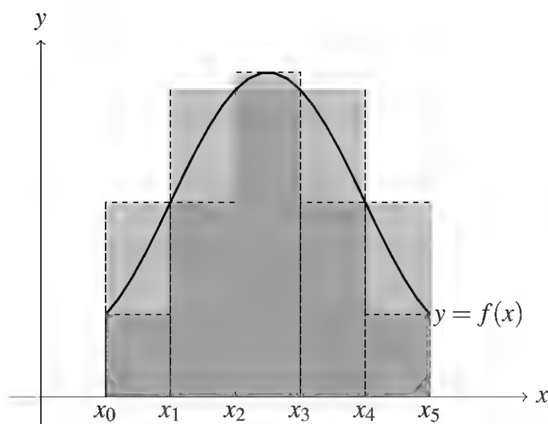


Figura 14.3.: La suma inferior y superior de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ asociada a una partición P compuesta por los puntos $x_0 := a$, x_1, x_2, x_3, x_4 y $x_5 := b$.

2. *Demostrar que si P y Q son particiones de $[a,b]$ tales que $P \subset Q$, entonces*

$$s(f,P) \leq s(f,Q) \quad y \quad S(f,P) \geq S(f,Q).$$

Concluir que si P y Q son dos particiones arbitrarias de $[a,b]$, entonces

$$s(f,P) \leq S(f,Q).$$

(Sugerencia: demostrar que $s(f,P) \leq s(f,P\cup Q) \leq S(f,P\cup Q) \leq S(f,Q)$.)

3. *Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ tales que $P_n \subset P_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $(s(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, $(S(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y ambas sucesiones son acotadas.*

4. *Concluir que las sucesiones $(s(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(S(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergen.*

Ejemplo 14.1.7 ([PS78, página 47]). *Consideremos la función $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x^2$ y sean $0 < a < b$. Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, sea $P_n := \{x_0,\dots,x_n\}$ una partición arbitraria de $[a,b]$. Dado que f es decreciente, tenemos que $m_i := f(x_i)$ y $M_i := f(x_{i-1})$ para $i = 1,\dots,n$. En consecuencia, la suma inferior $s(f,P_n)$ y superior $S(f,P_n)$ asociadas a P_n están dadas por*

$$s(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i}{x_i^2}, \quad S(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i}{x_{i-1}^2}.$$

Dado que $x_{i-1}^2 < x_{i-1}x_i < x_i^2$ para $i = 1,\dots,n$, concluimos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i}{x_i^2} < \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i}{x_{i-1}x_i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i}{x_{i-1}^2}.$$

Asimismo,
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{x_{i-1}x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{i-1}}{x_{i-1}x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{i-1}}-\frac{1}{x_i}\right)=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

Por lo tanto, para cada $n\in\mathbb{N}$ tenemos que

$$s(f,P_n)<\frac{1}{a}-\frac{1}{b}<S(f,P_n).$$

Por otro lado, a fin de estimar la diferencia entre ambas sumas, tenemos que

$$S(f,P_n)-s(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\left(\frac{1}{x_{i-1}^2}-\frac{1}{x_i^2}\right)\leq\max_{1\leq i\leq n}\Delta x_i\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{i-1}^2}-\frac{1}{x_i^2}\right)=\Delta P_n\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right).$$

En consecuencia, si $\lim_{n\to\infty}\Delta P_n=0$ deducimos que

$$\lim_{n\to\infty}s(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}S(f,P_n)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

Ejercicio 14.1.8 ([PS78, página 47]). *Sea $r\in\mathbb{N}$, $r\geq 2$, sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x):=x^{-r}$ y sean $0<a<b$. Sea $P_n:=\{x_0,\dots,x_n\}$ una partición arbitraria de $[a,b]$.*

1. *Demostrar que* $s(f,P)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{r-1}\left(\frac{1}{x_i^{r-1}x_{i-1}}+\frac{1}{x_i^{r-2}x_{i-1}^2}+\cdots+\frac{1}{x_ix_{i-1}^{r-1}}\right)\leq S(f,P_n).$

2. *Demostrar que*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{r-1}\left(\frac{1}{x_i^{r-1}x_{i-1}}+\frac{1}{x_i^{r-2}x_{i-1}^2}+\cdots+\frac{1}{x_ix_{i-1}^{r-1}}\right)=\frac{1}{r-1}\left(\frac{1}{a^{r-1}}-\frac{1}{b^{r-1}}\right).$$

3. *Concluir que si $\lim_{n\to\infty}\Delta P_n=0$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty}s(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}S(f,P_n)=\frac{1}{r-1}\left(\frac{1}{a^{r-1}}-\frac{1}{b^{r-1}}\right).$$

14.1.2. La integral definida de una función continua

Habiendo estudiado el comportamiento de las sumas de Cauchy, podemos pasar al concepto central al que estamos apuntando: el de la integral definida de una función continua. La idea intuitiva es que, cuando la norma de las particiones tiende a 0, las correspondientes sumas de Cauchy convergen a la integral definida de f en $[a,b]$. Claro que no podemos tomar "límite" cuando la norma de las particiones tiende a 0, dado que no tenemos una función "suma de Cauchy" que dependa de la variable "norma de la partición". Para evitar este inconveniente, vamos a considerar **sucesiones de sumas de Cauchy** $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to\infty}\Delta P_n=0$.

Por supuesto, hay que demostrar que el límite de una sucesión de sumas de Cauchy $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty}\Delta P_n=0$ existe y no depende de la sucesión en consideración. Éste es el objetivo de los resultados que siguen a continuación.

Lema 14.1.9. *Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\text{lím}_{n\to\infty}\Delta P_n = 0$ y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces la sucesión $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Demostración. Como habíamos señalado en la sección anterior, vamos a demostrar que la sucesión $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Nuestra estimación sobre la diferencia de dos sumas de Cauchy (Corolario 14.1.4) asegura que

$$|L(f,P_n) - L(f,P_m)| \leq 2\omega(f;\text{máx}\{\Delta P_n, \Delta P_m\})(b-a).$$

Dado que $(\Delta P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 y $\omega(f;\delta)$ es continua con $\omega(f;0) = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $\omega(f;\Delta P_n) < \varepsilon$. En consecuencia, para $n,m \geq n_0$ tenemos que

$$|L(f,P_n) - L(f,P_m)| \leq 2\varepsilon(b-a).$$

Esto muestra que la sucesión $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y por ende, converge. □

El siguiente paso es demostrar que el límite de $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es independiente de la sucesión de particiones en consideración.

Lema 14.1.10. *Sean $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de particiones de $[a,b]$ tales que* $\text{lím}_{n\to\infty}\Delta P_n = \text{lím}_{n\to\infty}\Delta Q_n = 0$ *y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces $(L(f,P_n) - L(f,Q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que las sucesiones $(\omega(f;\Delta P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\omega(f;\Delta Q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a 0, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{máx}\{\omega(f;\Delta P_n), \omega(f;\Delta Q_n)\} < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. La estimación de la diferencia de dos sumas de Cauchy (Corolario 14.1.4) asegura que

$$|L(f,P_n) - L(f,Q_n)| \leq 2\omega(f;\text{máx}\{\Delta P_n, \Delta Q_n\})(b-a)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, de lo que concluimos que $|L(f,P_n) - L(f,Q_n)| \leq 2\varepsilon(b-a)$ si $n \geq n_0$. Esto concluye la demostración. □

De los Lemas 14.1.9 y 14.1.10 tenemos que, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, el límite de cada sucesión $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de sumas de Cauchy con $\text{lím}_{n\to\infty}\Delta P_n = 0$ existe y no depende de la sucesión en consideración. Dicho límite es lo que definimos como **la integral definida de f en el intervalo** $[a,b]$.

Definición 14.1.11 (Integral definida)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Definimos la* **integral** *$\int_a^b f(x)dx$ de f en $[a,b]$ como el límite de cualquier sucesión de sumas de Cauchy $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de f en $[a,b]$ tal que* $\text{lím}_{n\to\infty}\Delta P_n = 0$.

Teniendo en cuenta nuestra discusión al comienzo del capítulo, si $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a,b]$, entonces diremos que **la integral definida de f es el área de la región**

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Tabla 14.1.: Las sumas de Cauchy $L_n := L(f, P_n)$ de (14.5) y el error $\Delta_n := \left| \int_0^1 \frac{dx}{x} - L_n \right|$.

n	L_n	Δ_n
1000	0.6933972424	0.0002500618
2000	0.6932721985	0.0001250179
3000	0.6932305237	0.0000833431
4000	0.6932096855	0.0000625049
5000	0.6931971798	0.0000499992

Ejemplo 14.1.12. *Consideremos la función $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$ y la sucesión de particiones $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por*

$$P_n := \{x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\},\ x_i^{(n)} := \frac{n+i}{n}\ (0 \le i \le n).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$L(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} f\big(x_{i-1}^{(n)}\big)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n+i-1} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i-1}. \tag{14.5}$$

Dado que $\Delta P_n = 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$, y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx.$$

A fin de determinar este límite, siguiendo [PS78, página 235] observamos que, si definimos $H_n := 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i-1} = H_{2n-1} - H_{n-1} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2}{2n-2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.\end{aligned}$$

Dado que el último término es el polinomio de Taylor de orden $2n-1$ de la función $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ en 1, especializado en $x = 2$ (ver el Ejercicio 12.2.18), por la expresión del error de la aproximación de la función $\ln$ por dicho polinomio concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i-1} = \ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx.$$

De todas maneras, cabe destacar que dicha convergencia al límite $0{,}6931471806\ldots$ es extremadamente lenta, como puede apreciarse en la Tabla 14.1.

Ejercicio 14.1.13. *Demostrar que*

$$\int_a^b 1\, dx = b - a, \quad \int_a^b x\, dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \quad \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \quad \int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

Sugerencia: estudiar $\lim_{n\to\infty} L(f,P_n)$, siendo $P_n := \{x_0^{(n)},\dots,x_n^{(n)}\}$, $x_i^{(n)} := a+i(b-a)/n$ $(0\le i\le n)$.

Desigualdades de integrales definidas que involucran funciones convexas

El hecho de que la integral definida de una función continua se obtiene como el límite de una sucesión de sumas de Cauchy nos permite obtener desigualdades para integrales a partir de desigualdades “discretas”. Vamos a ilustrar este “principio” obteniendo un análogo integral de la desigualdad de Jensen.

Sea $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función convexa. Recordamos la **desigualdad de Jensen** (Ejercicio 13.1.10): si $x_1,\dots,x_n\in[a,b]$ y $\theta_1\ge 0,\dots,\theta_n\ge 0$ con $\theta_1+\cdots+\theta_n=1$, entonces

$$g(\theta_1x_1+\cdots+\theta_nx_n)\le\theta_1g(x_1)+\cdots+\theta_ng(x_n). \qquad (14.6)$$

Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ funciones continuas tales que $g\circ f$ está bien definida y g es convexa. Fijemos $n\in\mathbb{N}$, sea $P_n:=\{x_0,\dots,x_n\}$ una partición de $[a,b]$ y consideremos la suma de Cauchy

$$L(f,P_n):=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i.$$

Dado que $b-a=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$, si dividimos la suma de Cauchy $L(f,P_n)$ por $b-a$ podemos expresarla en una forma adecuada para aplicar la desigualdad de Jensen:

$$\frac{1}{b-a}L(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}\theta_if(x_{i-1}),\quad \text{con } \theta_i:=\frac{\Delta x_i}{b-a}\quad (1\le i\le n).$$

Teniendo en cuenta que g es convexa, de la desigualdad de Jensen (14.6) deducimos que

$$g\left(\frac{1}{b-a}L(f,P_n)\right)\le\sum_{i=1}^{n}\theta_i(g\circ f)(x_{i-1})=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(g\circ f)(x_{i-1})\Delta x_i. \qquad (14.7)$$

Observamos que la sumatoria del término de la derecha en (14.7) es la suma de Cauchy $L(g\circ f,P_n)$. Siendo f y $g\circ f$ continuas en $[a,b]$, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de particiones con $\lim_{n\to\infty}\Delta P_n=0$, tomando límite en ambos miembros de (14.7) deducimos el siguiente resultado.

Teorema 14.1.14 (Desigualdad de Jensen integral). *Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ funciones continuas tales que $g\circ f$ está bien definida y g es convexa*[1]*. Entonces*

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b(g\circ f)(x)dx. \qquad (14.8)$$

Ejercicio 14.1.15 (Desigualdad de Steffensen). *Sean $f,p:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones continuas tales que $p(x)>0$ para cada $x\in[a,b]$ y sea $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ una función convexa tal que la composición $g\circ f$ está bien definida.*

[1] Cabe destacar que una función convexa $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ es necesariamente continua en (a,b) y se pueden redefinir sus valores en a y b de modo que resulte continua en $[a,b]$ (ver, por ejemplo, [NP06, §1.3]), por lo que la hipótesis de continuidad de g no es esencial.

1. *Sea $P := \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Si $p_i := p(x_i)$ y $f_i := f(x_i)$ para $1 \le i \le n$, demostrar que*
$$g\left(\frac{p_1 f_1 + \cdots + p_n f_n}{p_1 + \cdots + p_n}\right) \le \frac{p_1 g(f_1) + \cdots + p_n g(f_n)}{p_1 + \cdots + p_n}.$$

2. *Deducir la siguiente generalización de la desigualdad de Jensen integral (14.8):*
$$g\left(\frac{\int_a^b p(x) f(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}\right) \le \frac{\int_a^b p(x)(g \circ f)(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}.$$

Otra desigualdad importante que habíamos demostrado mediante argumentos de convexidad es la **desigualdad de Hölder** (Ejercicio 13.1.22): dados $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$ y $p, q > 1$ con $1/p + 1/q = 1$,
$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \le \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{1/p} \left(|y_1|^q + \cdots + |y_n|^q\right)^{1/q}. \tag{14.9}$$
El propósito del siguiente ejercicio es obtener un análogo integral de dicha desigualdad.

Ejercicio 14.1.16 (Desigualdad de Hölder integral)**.** *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas y sean $p, q > 1$ con $1/p + 1/q = 1$.*

1. *Si $P := \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a,b]$, $f_i := f(x_i)$ y $g_i := g(x_i)$ para $1 \le i \le n$, demostrar que*
$$f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n \le \left(|f_1|^p + \cdots + |f_n|^p\right)^{1/p} \left(|g_1|^q + \cdots + |g_n|^q\right)^{1/q}.$$

2. *Deducir la siguiente* **versión integral de la desigualdad de Hölder***:*
$$\int_a^b f(x) g(x) dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}. \tag{14.10}$$

Cabe destacar que, en el caso $p = q = 2$, la versión integral de la desigualdad de Hölder (14.10) toma la forma
$$\int_a^b f(x) g(x) dx \le \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)^{1/2}, \tag{14.11}$$
y se conoce como la **versión integral de la desigualdad de Cauchy–Schwarz**.

Ejercicio 14.1.17. *Demostrar que $\int_0^\pi \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx \le \sqrt{2\pi}$.*

Para concluir esta sección, en el ejercicio a continuación discutimos otra desigualdad importante, que es de hecho la versión integral de la siguiente **desigualdad de Minkowski** (Ejercicio 13.1.23): si $p > 1$ y $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$, entonces
$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/p}.$$

Ejercicio 14.1.18 (Desigualdad de Minkowski). *Si $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ son dos funciones continuas y $p\geq 1$, demostrar que*

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

14.2. Propiedades de la integral definida

Al comienzo de la discusión sobre el concepto de integral definida hemos dicho que buscábamos una noción "operativa" de integral. En tal sentido, establecemos una serie de propiedades de las integrales definidas, comenzando por la **aditividad**.

Proposición 14.2.1 (Aditividad de la integral definida). *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Si $c\in(a,b)$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demostración. Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\lim_{n\to\infty}\Delta P_n = 0$. Dado que

$$Q_n := P_n \cup \{c\} = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)} \dots, x_{i_n-1}^{(n)}, c, x_{i_n}^{(n)}, \dots, x_{m_n}^{(n)}\}$$

refina a P_n para cada $n\in\mathbb{N}$, resulta $\lim_{n\to\infty}\Delta Q_n = 0$. Por lo tanto, si

$$Q_n' := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{i_n-1}^{(n)}, c\}, \quad Q_n'' := \{c, x_{i_n}^{(n)}, \dots, x_{m_n}^{(n)}\},$$

tenemos que $(Q_n')_{n\in\mathbb{N}}$ y $(Q_n'')_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de particiones de $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente, cuyas normas tienden a 0, tales que

$$L(f,Q_n) = L(f,Q_n') + L(f,Q_n'')$$

para cada $n\in\mathbb{N}$. Por lo tanto, tomando límite en la identidad precedente, obtenemos que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} L(f,Q_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,Q_n') + \lim_{n\to\infty} L(f,Q_n'') = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Esto completa la demostración. □

Ejercicio 14.2.2. *Sea $a>0$ y $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ una función continua.*

1. *Demostrar que si f es impar, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.*

2. *Demostrar que si f es par, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.*

14.2.1. Propiedades aritméticas de la integral definida

Las propiedades aritméticas de la integral definida pueden resultar útiles a efectos de combinar resultados conocidos.

Proposición 14.2.3 (Propiedades aritméticas de la integral definida). *Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dos funciones continuas. Entonces:*

1. *Para todo $\lambda\in\mathbb{R}$, $\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx$.*

2. $\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$.

Demostración. Ambas propiedades son consecuencias inmediatas de la correspondiente propiedad para sumas de Cauchy. En efecto, sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\lim_{n\to\infty}\Delta P_n=0$. Entonces, para cada $n\in\mathbb{N}$, valen las identidades

- $L(\lambda f,P_n)=\lambda\,L(f,P_n)$,
- $L(f+g,P_n)=L(f,P_n)+L(g,P_n)$.

De la primera identidad concluimos entonces que

$$\int_a^b \lambda f(x)dx=\lim_{n\to\infty}L(\lambda f,P_n)=\lambda\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)=\lambda\int_a^b f(x)dx.$$

Asimismo, por la segunda identidad tenemos que

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}L(f+g,P_n)=\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)+\lim_{n\to\infty}L(g,P_n)=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx.$$

Esto completa la demostración de la proposición. □

Ejemplo 14.2.4. *Supongamos que queremos calcular las integrales definidas*

$$S:=\int_a^b \operatorname{sen}^2 x\,dx \quad y \quad C:=\int_a^b \cos^2 x\,dx.$$

Observamos que es más fácil determinar $S+C$ y $S-C$. En efecto, por las propiedades aritméticas de la integral definida (Proposición 14.2.3) tenemos que

$$S+C=\int_a^b (\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)dx \quad y \quad S-C=\int_a^b (\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x)dx.$$

Dado que $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, concluimos que

$$S+C=\int_a^b 1\,dx=b-a.$$

Por otro lado, por la regla de Barrow (Corolario 0.3.6) tenemos que

$$S-C=\int_a^b (\operatorname{sen} x-\cos x)(\operatorname{sen} x+\cos x)dx=-\left.\frac{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}{2}\right|_a^b.$$

Observamos que $(\operatorname{sen} x+\cos x)^2=1+2\operatorname{sen} x\cos x$, de lo que deducimos que

$$S-C=-\cos b\operatorname{sen} b+\cos a\operatorname{sen} a=-\operatorname{sen}(b-a).$$

En consecuencia, vemos que

$$\int_a^b \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{b-a}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(b-a) \quad y \quad \int_a^b \cos^2 x\,dx = \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(b-a).$$

Ejercicio 14.2.5. *Demostrar que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función polinomial de grado menor o igual que 2, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big). \tag{14.12}$$

(Sugerencia: observar que basta con demostrar (14.12) para las funciones 1, x y x^2.)

14.2.2. Monotonía de la integral definida

Por último, una característica fundamental de la integral definida es su **monotonía**, que expresamos en el siguiente enunciado.

Proposición 14.2.6 (Propiedades de orden de la integral definida)**.** *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Valen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. En particular, si $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*
2. $\big|\int_a^b f(x)dx\big| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Demostración. A fin de demostrar la primera afirmación, sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$. Dado que $L(f,P_n) \leq L(g,P_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, concluimos que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) \leq \lim_{n\to\infty} L(g,P_n) = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Consideramos ahora la segunda afirmación del enunciado. Dado que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

para cada $x \in [a,b]$, del ítem anterior se deduce que

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Esto completa la demostración. □

Ejemplo 14.2.7 (Desigualdad de Hadamard)**.** *En este ejemplo aplicamos las propiedades de la integral definida a fin de obtener una estimación fundamental de la integral de una función convexa, conocida como la* **desigualdad de Hadamard**.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función convexa y continua y sea $x \in [a,b]$. Tenemos entonces que existe $t \in [0,1]$ tal que $x = (1-t)a + tb$. Por lo tanto,

$$f(x) = f\big(ta + (1-t)b\big) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Integrando ambos miembros de esta desigualdad, la monotonía de la integral definida (Proposición 14.2.6) y sus propiedades aritméticas (Proposición 14.2.3) aseguran que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f\big(ta+(1-t)b\big)dt \leq \int_0^1 \big(tf(a)+(1-t)f(b)\big)dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Por otro lado, la aditividad de la integral definida (Proposición 14.2.1) implica que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)dt \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

En resumen, tenemos la **desigualdad de Hadamard** *(o la desigualdad de Hermite–Hadamard; ver, por ejemplo, [NP06, §1.9]):*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

14.3. Aproximación de la integral definida y estimación del error

Como se puede apreciar en los ejemplos que hemos considerado hasta aquí, la integración definida es un proceso límite que, de acuerdo con la función en consideración, puede resultar sumamente complicado. Si bien vamos a desarrollar herramientas que nos permiten simplificar en algunos casos dicho proceso, estas herramientas son aplicables a "pocas" funciones (aunque incluyen casos importantes). Por lo tanto, es necesario considerar aproximaciones de la integral definida, lo que debe ser acompañado del análisis del error correspondiente. En esta sección vamos a analizar el error que cometemos al aproximar la integral definida por sumas de Cauchy y a considerar un método alternativo de aproximación de la integral definida, el **método de los trapecios**. Dichos análisis del error utilizan un resultado sumamente útil para estimar integrales definidas, el Teorema del valor medio para integrales, que discutimos a continuación.

14.3.1. El Teorema del valor medio para integrales

Así como el Teorema del valor medio (Teorema 12.1.4) resulta una herramienta fundamental a fin de obtener estimaciones globales para funciones diferenciables, en esta sección vamos a obtener una herramienta análoga, el **Teorema del valor medio para integrales**, que nos va a permitir estimar la integral definida de funciones continuas.

Teorema 14.3.1 (Teorema del valor medio para integrales). *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe $c\in[a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Demostración. Sea $m := \text{mín}\{f(x) : a \leq x \leq b\}$ y $M := \text{máx}\{f(x) : a \leq x \leq b\}$. Tenemos entonces que $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [a,b]$. En consecuencia, por la monotonía de la integral definida (Proposición 14.2.6), concluimos que

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b m\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M\,dx = M. \tag{14.13}$$

Dado que m y M son dos valores de la imagen de f, por el Teorema de los valores intermedios (Teorema 8.1.7) deducimos que existe $c \in [a,b]$ tal que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$. Esto concluye la demostración. □

Una consecuencia inmediata de (14.13) es la siguiente estimación.

Corolario 14.3.2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sean $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [a,b]$. Entonces*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

En el siguiente ejercicio consideramos una generalización del Teorema del valor medio para integrales que suele ser útil a efectos de estimar ciertas integrales definidas.

Ejercicio 14.3.3 (Teorema del valor medio generalizado para integrales)**.** *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ no cambia de signo en $[a,b]$.*

1. *Demostrar que existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.*
2. *Más generalmente, si $h : [a,b] \to [a,b]$ es una función tal que $f \circ h$ es continua, demostrar que existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\int_a^b (f \circ h)(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

14.3.2. Aproximación por sumas de Cauchy

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Sabemos que, si $(L(f,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de sumas de Cauchy de f en $[a,b]$ con $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ahora bien, cabe preguntarse por la velocidad con la que ocurre dicha convergencia.

Supongamos que f es de clase C^1 en $[a,b]$ de modo que $|f'(x)| \leq M$ para cada $x \in [a,b]$ y consideremos la suma de Cauchy $L(f,P_n)$ asociada a la partición $P_n := \{x_0, \ldots, x_n\}$ definida por $x_i := a + i(b-a)/n$ $(0 \leq i \leq n)$. Queremos determinar cuán rápido converge a 0 la diferencia

$$\Delta_n := \int_a^b f(x)dx - L(f,P_n)$$

Para esto, siguiendo [Mur80], tenemos que

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(x_{i-1})\Delta x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(x_{i-1})\big)dx.$$

El Teorema del valor medio (Teorema 12.1.4) asegura que, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ y cada $x \in (x_{i-1}, x_i)$, existe $c_x \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f(x) - f(x_{i-1}) = f'(c_x)(x - x_{i-1}).$$

La función $x \mapsto c_x$ no es necesariamente continua en $[x_{i-1}, x_i]$, pero la función $x \mapsto f'(c_x)$ sí lo es en dicho intervalo. Así, el Teorema del valor medio generalizado para integrales (Ejercicio 14.3.3) asegura que, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, existe $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(x_{i-1})\big)dx = f'(c_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})dx = f'(c_i)\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} = f'(c_i)\frac{(b-a)^2}{2n^2}.$$

Por lo tanto,

$$|\Delta_n| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(f(x) - f(x_{i-1})\big)dx \right| \le \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{i=1}^{n} |f'(c_i)| \le M\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

En conclusión, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 14.3.4. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $|f'(x)| \le \lambda$ para cada $x \in [a,b]$. Si $P_n := \{x_0,\ldots,x_n\}$ es la partición $x_i := a + \frac{i(b-a)}{n}$ $(0 \le i \le n)$, entonces*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L(f,P_n) \right| \le M\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Ejemplo 14.3.5. *Consideremos nuevamente la función $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$ del Ejemplo 14.1.12. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Si $P_n := \{x_0,\ldots,x_n\}$ es la partición $x_i := (n+i)/n$ $(0 \le i \le n)$, entonces habíamos demostrado que*

$$L(f,P_n) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

El Teorema 14.3.4 asegura que, dado que $|f'(x)| \le 1$ para cada $x \in [1,2]$, resulta

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x}dx - L(f,P_n) \right| \le \frac{1}{2n}.$$

Si se compara esta estimación con los errores listados en la Tabla 14.1, se observa que

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x}dx - L(f,P_n) \right| \approx \frac{1}{4n}.$$

Ejercicio 14.3.6. *Para las integrales del Ejercicio 14.1.13, obtener estimaciones del error que se comete al aproximarlas por las sumas de Cauchy definidas como en el Teorema 14.3.4.*

14.3.3. Aproximación por el método de los trapecios

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $P := \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. La idea que subyace a las sumas de Cauchy es que, si la norma ΔP de la partición P es "suficientemente chica", entonces la integral definida de f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se aproxima "bien" por la del rectángulo de $[x_{i-1}, x_i] \times \mathrm{int}(0, f(x_{i-1}))$. Es decir, suponemos que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx f(x_{i-1})\Delta x_i.$$

Sin embargo, también es posible aproximar dicha integral por el área del **trapecio** definido por los puntos $(0, x_{i-1})$, $(0, x_i)$, $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$ (ver la Figura 14.4), es decir,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\Delta x_i. \tag{14.14}$$

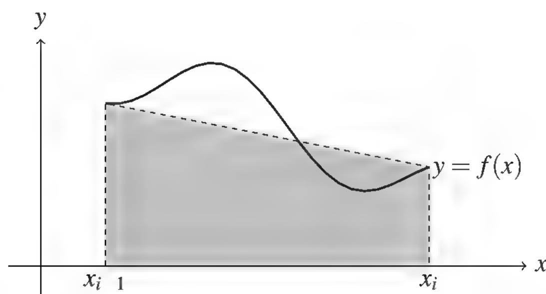


Figura 14.4.: La aproximación de la integral definida de una función $f : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$ por el área del trapecio correspondiente.

El objetivo de esta sección es discutir el correspondiente método de aproximación de la integral definida de f, el **método de los trapecios**, y estimar el error que cometemos en dicha aproximación. Comenzamos con una estimación del error en (14.14).

Ejercicio 14.3.7. *Sea $f : [r,s] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en $[r,s]$ y sea $p_1 \in \mathbb{R}[x]$ el polinomio que interpola a f en los puntos r y s.*

1. *Demostrar que* $\displaystyle\int_r^s p_1(x)dx = \frac{f(r) + f(s)}{2}(s - r).$

2. *Por las estimaciones del error de interpolación (Ejercicio 12.2.8) tenemos que, para cada $x \in (r,s)$, existe $c_x \in (r,s)$ tal que*

$$f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2}f''(c_x)(x - r)(x - s).$$

Integrar esta expresión y concluir que existe $c \in (r,s)$ tal que

$$\int_r^s f(x)dx - \frac{f(r)+f(s)}{2}(s-r) = -\frac{1}{12}f''(c)(s-r)^3. \tag{14.15}$$

(Sugerencia: utilizar el Teorema del valor medio generalizado para integrales (Ejercicio 14.3.3)).

Ahora pasamos a considerar el método de los trapecios. La idea, como hemos dicho, es aproximar la integral definida de f en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ como en (14.14). Combinando dichas aproximaciones obtenemos la siguiente aproximación de la integral definida de f en $[a,b]$, conocida como el **método de los trapecios** (ver la Figura 14.5):

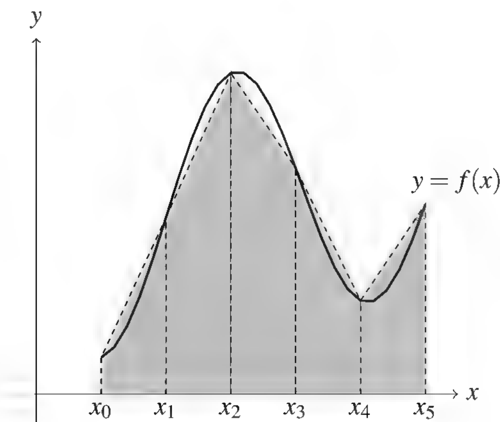


Figura 14.5.: La aproximación del método de los trapecios de la integral definida de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ asociado a una partición $P := \{x_0, \ldots, x_5\}$.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\Delta x_i.$$

En particular, si los nodos $x_0, \ldots, x_n$ que definen la partición P en consideración están equiespaciados, es decir, $x_i = a + ih$ para $0 \le i \le n$, con $h := (b-a)/n$, entonces $\Delta x_i = h$ para $1 \le i \le n$, y por lo tanto, tenemos la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n := \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right). \tag{14.16}$$

El objetivo del siguiente ejercicio es obtener una estimación del error en (14.16).

Ejercicio 14.3.8 (Error del método de los trapecios)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase C^2.*

1. *Demostrar que existe $c \in (a,b)$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx - T_n = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(c)$.*

2. *Concluir que la sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\int_a^b f(x)dx$.*

Tabla 14.2.: El valor de las aproximaciones T_n del método de los trapecios para $\int_1^2 dx/x$ y el error $\Delta_n^T := \int_1^2 dx/x - T_n$.

n	T_n	Δ_n^T
10000	0.693147181185	-0.000000000625
20000	0.693147180716	-0.000000000156
30000	0.693147180629	-0.000000000069
40000	0.693147180599	-0.000000000039
50000	0.693147180585	-0.000000000025

Ejemplo 14.3.9. *Consideramos la aplicación del método de los trapecios a fin de aproximar la integral definida de la función $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$ en el intervalo $[1,2]$. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $P_n := \{x_0, \dots, x_n\}$ la partición del intervalo $[1,2]$ definida por $x_i := (n+i)/n$ para $0 \leq i \leq n$. La correspondiente aproximación T_n es*

$$T_n = \frac{1}{2n}\left(f(1) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(2)\right) = \frac{1}{2n}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{n+i} + \frac{1}{2}\right).$$

En la Tabla 14.2 listamos algunos valores de T_n junto con los errores correspondientes. Vemos que los valores T_n proveen una mejor aproximación que las sumas de Cauchy $L(f, P_n)$ del Ejemplo 14.1.12. De hecho, en la Tabla 14.2 se observa que

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx - T_n \approx -\frac{1}{16n^2},$$

que concuerda con lo que predice la estimación del error del Ejercicio 14.3.8.

Ejercicio 14.3.10. *Demostrar que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función convexa y T_n es cualquier aproximación de la integral definida f en $[a,b]$ por el método de los trapecios, entonces $\int_a^b f(x)dx \leq T_n$.* (Sugerencia: utilizar la desigualdad de Hadamard (Ejemplo 14.2.7).)

Ejercicio 14.3.11. *Para las integrales del Ejercicio 14.1.13, aplicar el método de los trapecios y obtener estimaciones del error que se comete al aproximarlas por dicho método.*

15. Integración definida II: funciones integrables

Hasta acá hemos considerado exclusivamente la integral definida de funciones continuas. Sin embargo, es posible extender el concepto de integral definida a una clase más amplia de funciones, que vamos a denominar **funciones integrables**. Éste es el objetivo del presente capítulo.

Dada una función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, hemos definido la integral $\int_a^b f(x)dx$ de f en $[a,b]$ en términos de sumas de Cauchy asociadas a particiones de $[a,b]$. Recordamos que, si $P:=\{x_0,\dots,x_n\}$ es una partición de $[a,b]$, la suma de Cauchy $L(f,P)$ de f asociada a P es la suma

$$L(f,P):=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i.$$

Esta suma es un tipo particular de suma de Riemann de f asociada a P. En general, dada una elección de puntos para P, es decir, una n–upla $\Xi:=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ tal que $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ para $1\le i\le n$, la **suma de Riemann** $S(f,P,\Xi)$ de f asociada a P y Ξ se define como

$$S(f,P,\Xi):=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

En el Lema 14.1.10 hemos demostrado que, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que $\lim_{n\to\infty}\Delta P_n=0$, el **límite** $\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)$ **de las sumas de Cauchy** $L(f,P_n)$ **es independiente de** $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y es lo que hemos denominado **la integral definida** $\int_a^b f(x)dx$ de f en $[a,b]$. Más generalmente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 15.0.12. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua, sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ tal que $\lim_{n\to\infty}\Delta P_n=0$ y sea $(\Xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elecciones de puntos para $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (es decir, Ξ_n es una elección de puntos para P_n para cada $n\in\mathbb{N}$). Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n,\Xi_n)=\int_a^b f(x)dx. \tag{15.1}$$

Demostración. De acuerdo con el Lema 14.1.10, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n)=\int_a^b f(x)dx. \tag{15.2}$$

Sea $\varepsilon>0$. Dado que f es continua y $[a,b]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, tenemos que f es uniformemente continua (Teorema 10.3.2). Esto implica que existe $\delta>0$ tal que, si $x,y\in[a,b]$ y $|x-y|\le\delta$, entonces $|f(x)-f(y)|\le\varepsilon$. Como $\lim_{n\to\infty}\Delta P_n=0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\Delta P_n<\delta$ si

$n \geq n_0$. Por lo tanto, si $n \geq n_0$, entonces

$$|S(f,P_n,\Xi_n) - L(f,P_n)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f(x_{i-1})| \Delta x_i \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon(b-a), \qquad (15.3)$$

donde la acotación $|f(\xi_i) - f(x_{i-1})| \leq \varepsilon$ se debe al hecho de que, dado que $x_{i-1}, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, resulta $|\xi_i - x_{i-1}| \leq \delta$, y por ende $|f(\xi_i) - f(x_{i-1})| \leq \varepsilon$.

Por otro lado, de (15.2) deducimos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| L(f,P_n) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon \qquad (15.4)$$

si $n \geq n_1$. En consecuencia, si $n \geq \text{máx}\{n_0, n_1\}$, de (15.3) y (15.4) concluimos que

$$\begin{aligned} \left| S(f,P_n,\Xi_n) - \int_a^b f(x)dx \right| &\leq |S(f,P_n,\Xi_n) - L(f,P_n)| + \left| L(f,P_n) - \int_a^b f(x)dx \right| \\ &\leq \varepsilon(b-a) + \varepsilon = \varepsilon(b-a+1). \end{aligned}$$

Esto prueba (15.1) y concluye la demostración del enunciado. □

En otras palabras, a efectos de determinar la integral definida de una función **continua** en un intervalo $[a,b]$ podemos considerar sumas de Riemann, como vamos a hacer de ahora en más.

15.1. Funciones integrables

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función arbitraria y consideremos una sucesión de sumas de Riemann $(S(f,P_n,\Xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de f en $[a,b]$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$. Como hemos argumentado, sería de esperar que, si existe el límite de $(S(f,P_n,\Xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ para cada sucesión de particiones $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\text{lím}_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$ y es independiente de la sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, éste represente adecuadamente la noción intuitiva de integral definida de f en $[a,b]$ del mismo modo que para funciones continuas. Si f satisface esta propiedad se denomina **integrable**, y el valor límite de cualquier sucesión de sumas de Riemann $(S(f,P_n,\Xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ con $\text{lím}_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$ es lo que se denomina la integral de f en $[a,b]$.

Definición 15.1.1 (Función integrable). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si existe el límite de $(S(f,P_n,\Xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ para cada sucesión de particiones $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\text{lím}_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$ y es independiente de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces f se dice* **integrable** *en $[a,b]$. En tal caso, definimos la* **integral definida** *$\int_a^b f(x)dx$ de f en $[a,b]$ como el límite de cualquier sucesión de sumas de Riemann $(S(f,P_n,\Xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$.*

Con esta terminología, podemos enunciar del siguiente modo nuestro resultado sobre la integral definida de una función continua (Teorema 15.0.12).

Teorema 15.1.2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es integrable.*

Ejercicio 15.1.3 (Invariancia por traslaciones). *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, demostrar que $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$.*

Ejercicio 15.1.4 (La integral definida como "promedio"). *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable y sea $P_n := \{x_0^{(n)},\dots,x_n^{(n)}\}$ la partición de $[a,b]$ definida por $x_i^{(n)} := a+i(b-a)/n$ para $0\le i\le n$. Si $f_i^{(n)} := f(x_i^{(n)})$ para $1\le i\le n$, demostrar que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_1^{(n)}+f_2^{(n)}+\cdots+f_n^{(n)}}{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \text{ y } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_1^{(n)}f_2^{(n)}\cdots f_n^{(n)}}=e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx},$$

es decir, la media aritmética y la media geométrica de los valores $f_i^{(n)}$ converge a la correspondiente "media" de la función f. De todas maneras, cabe destacar que, en ambos casos, la convergencia suele resultar lenta.

La integral definida de funciones integrables satisface las mismas propiedades que la de funciones continuas, como puede constatarse observando que las demostraciones de la aditividad (Proposición 14.2.1), las propiedades aritméticas (Proposición 14.2.3) y la monotonía (Proposición 14.2.6) continúan siendo válidas en este contexto más general. Así, tenemos el siguiente resultado, cuya demostración dejamos a cargo del lector.

Teorema 15.1.5. *Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones integrables.*

1. *Si $c\in(a,b)$, entonces $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.*
2. *Si $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces $\int_a^b(\lambda f(x)+g(x))dx=\lambda\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$.*
3. *Si $f(x)\le g(x)$ para cada $x\in[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.*

15.1.1. Caracterización ε–δ de la integrabilidad

Nuestra definición de integral definida (Definiciones 14.1.11 y 15.1.1) le da forma matemática a la idea intuitiva de "tomar límite" de las sumas de Riemann cuando la norma de las mismas tiende a 0. Ahora bien, a propósito de la discusión de límites continuos hemos demostrado que éstos pueden definirse tanto por sucesiones como en términos "ε–δ" (Lema 10.1.14). A fin de obtener una noción de función integrable más simple, vamos a expresarla en términos "ε–δ".

Teorema 15.1.6 (Caracterización ε–δ de la integrabilidad). *Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable si y solo si para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que, si P y Q son particiones de $[a,b]$ con $\Delta P<\delta$ y $\Delta Q<\delta$ y Ξ y Λ son elecciones de puntos para P y Q, entonces*

$$|S(f,P,\Xi)-S(f,Q,\Lambda)|<\varepsilon.$$

Demostración. Argumentamos como en la demostración de la equivalencia de la caracterización de los límites continuos por sucesiones o en la forma ε–δ (Lema 10.1.14). Supongamos que existe $\varepsilon_0>0$ tal que no existe $\delta>0$ en las condiciones del enunciado. Si elegimos $\delta=1/n$ para cada $n\in\mathbb{N}$, tenemos que existen particiones P_n y Q_n de $[a,b]$ con $\Delta P_n<1/n$ y $\Delta Q_n<1/n$ y elecciones de puntos Ξ_n y Λ_n para P_n y Q_n tales que

$$|S(f,P_n,\Xi_n)-S(f,Q_n,\Lambda_n)|\ge\varepsilon_0 \tag{15.5}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que $(\Delta P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\Delta Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a 0 y (15.5) implica que

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n,\Xi_n) \neq \lim_{n\to\infty} S(f,Q_n,\Lambda_n),$$

concluimos que f no es integrable en $[a,b]$.

Por otro lado, supongamos ahora que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ que satisface las condiciones del enunciado. Dada una sucesión de particiones $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[a,b]$ con $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$ y una sucesión de elecciones de puntos $(\Xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, afirmamos que $(S(f,P_n,\Xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Delta P_n < \delta$ para cada $n \geq n_0$, lo cual implica que

$$|S(f,P_n,\Xi_n) - S(f,P_m,\Xi_m)| < \varepsilon$$

para $n,m \geq n_0$. Vemos entonces que $(S(f,P_n,\Xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y por ende, converge. Asimismo, sean $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de particiones de $[a,b]$ tales que $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = \lim_{n\to\infty} \Delta Q_n = 0$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ que satisface las condiciones del enunciado. Si elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\max\{\Delta P_n, \Delta Q_n\} < \delta$ para cada $n \geq n_0$, concluimos que $|S(f,P_n,\Xi_n) - S(f,Q_n,\Lambda_n)| < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$, lo que demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,P_n,\Xi_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(f,Q_n,\Lambda_n)$. □

Ejemplo 15.1.7. *Sea* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *la función definida por* $f(x) := 1/x$ *si* $x \neq 0$ *y* $f(0) := 0$. *Afirmamos que* f *no es integrable en* $[0,1]$. *En efecto, dado* $n \in \mathbb{N}$, *sean*

$$P_n := \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}, \ \Xi_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right), \ \Lambda_n := \left(\frac{1}{2n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right),$$

es decir, Ξ_n *y* Λ_n *son dos elecciones de puntos para* P_n *que difieren solo en el primer punto. La diferencia de las correspondientes sumas de Riemann es*

$$S(f,P_n,\Lambda_n) - S(f,P_n,\Xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(\lambda_i) - f(\xi_i)\big)\Delta x_i = \left(f\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{1}{n} = n\frac{1}{n} = 1.$$

Dado que $\Delta P_n = 1/n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *vemos que no existe* $\delta > 0$ *tal que, si* P *y* Q *son particiones de* $[0,1]$ *con* $\Delta P < \delta$ *y* $\Delta Q < \delta$, *entonces* $|S(f,P,\Xi) - S(f,Q,\Lambda)| < 1$. *Esto prueba que* f *no es integrable en* $[0,1]$.

Del resultado precedente deducimos que podemos aproximar la integral entre a y b de una función integrable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ con un grado de precisión arbitrario con tal de considerar sumas de Riemann correspondientes a particiones suficiemente finas. En efecto, fijemos $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ como en la caracterización ε–δ de la integrabilidad (Teorema 15.1.6). Sea P una partición de $[a,b]$ con $\Delta P < \delta$ y sea Ξ una elección de puntos de $[a,b]$ para P. Afirmamos que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S(f,P,\Xi) \right| < 2\varepsilon.$$

A fin de demostrar esta afirmación, observamos que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de particiones tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n,\Xi_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Fijemos $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\Delta P_{n_0} < \delta$ y

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S(f, P_{n_0}, \Xi_{n_0}) \right| < \varepsilon. \tag{15.6}$$

Dado que $\Delta P_{n_0} < \delta$ y $\Delta P < \delta$, la caracterización ε–δ de la integrabilidad nos asegura que $|S(f, P_{n_0}, \Xi_{n_0}) - S(f, P, \Xi)| < \varepsilon$. Combinando esta desigualdad con (15.6) tenemos que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S(f, P, \Xi) \right| \leq \left| \int_a^b f(x)dx - S(f, P_{n_0}, \Xi_{n_0}) \right| + |S(f, P_{n_0}, \Xi_{n_0}) - S(f, P, \Xi)| < 2\varepsilon.$$

Así, hemos demostrado el siguiente resultado.

Corolario 15.1.8 (Teorema de Darboux). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si P es una partición de $[a,b]$ con $\Delta P < \delta$ y Ξ es una elección de puntos para P, entonces*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S(f, P, \Xi) \right| < \varepsilon.$$

Ejemplo 15.1.9. *Sean $0 < a < b$ y consideremos la integral definida $\int_a^b x^2 dx$. Dado $\varepsilon > 0$, queremos determinar $\delta > 0$ que asegure que la conclusión del Teorema de Darboux es cierta. Para esto, sea $P := \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$ y $\Xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ una elección de puntos para P. Tenemos entonces que*

$$\int_a^b x^2 dx - S(f, P, \Xi) = \frac{b^3}{2} - \frac{a^3}{3} - \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^3}{3} - \frac{x_{i-1}^3}{3} - \xi_i^2 \Delta x_i \right).$$

Fijemos un intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. El Teorema del valor medio (Teorema 12.1.4) asegura que existe $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $x_i^3 - x_{i-1}^3 = 3\eta_i^2 \Delta x_i$. En consecuencia,

$$\int_a^b x^2 dx - S(f, P, \Xi) = \sum_{i=1}^n (\eta_i^2 - \xi_i^2) \Delta x_i.$$

A fin de determinar la validez del Teorema de Darboux en este caso, vamos a estimar la diferencia entre la integral definida $\int_a^b x^2 dx$ y la suma de Riemann $S(f, P, \Xi)$. Por la identidad precedente tenemos que

$$\left| \int_a^b x^2 dx - S(f, P, \Xi) \right| \leq \sum_{i=1}^n |\eta_i + \xi_i| \, |\eta_i - \xi_i| \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n 2b \Delta x_i^2 \leq 2b \Delta P \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 2b(b-a) \Delta P.$$

Esto prueba que $\delta := \varepsilon / 2b(b-a)$ satisface la condición del Teorema de Darboux.

15.1.2. Integrabilidad por medio de sumas inferiores y superiores

La caracterización ε–δ de las funciones integrables (Teorema 15.1.6) simplifica en algún sentido la cuestión: se trata de comparar **dos** sumas de Riemann asociadas a particiones “suficientemente finas”. Vamos a expresar la cuestión en términos de sumas inferiores y superiores de f. Dada

una función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición $P := \{x_0,\dots,x_n\}$ de $[a,b]$, la **suma inferior** $s(f,P)$ y la **suma superior** $S(f,P)$ asociadas a f y P se definen por

$$s(f,P) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad S(f,P) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

siendo $m_i := \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\}$ y $M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1},x_i]\}$.

Integrabilidad por medio de diferencias de sumas inferiores y superiores

Supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y sea $\varepsilon > 0$. La caracterización ε–δ de la integrabilidad asegura que existe $\delta > 0$ tal que, si P y Q son particiones de $[a,b]$ con $\Delta P < \delta$ y $\Delta Q < \delta$ y Ξ y Λ son elecciones de puntos para P y Q, entonces

$$|S(f,P,\Xi) - S(f,Q,\Lambda)| < \varepsilon. \tag{15.7}$$

Sean P y Q particiones de $[a,b]$ tales que $\Delta P < \delta$ y $\Delta Q < \delta$. Consideremos la suma superior $S(f,P)$ asociada a la partición $P := \{x_0,x_1,\dots,x_n\}$. Dado $i \in \{1,\dots,n\}$, de la definición de M_i concluimos que existe $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ tal que $M_i - \varepsilon < f(\xi_i) \leq M_i$. Si llamamos $\Xi := (\xi_1,\dots,\xi_n)$ a la elección de puntos así obtenida, tenemos que

$$S(f,P) - (b-a)\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} (M_i - \varepsilon)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S(f,P,\Xi) \leq S(f,P). \tag{15.8}$$

Con un razonamiento similar deducimos que, si Q es una partición de $[a,b]$, existe una elección de puntos Λ para Q de modo que

$$s(f,Q) \leq S(f,Q,\Lambda) < s(f,Q) + \varepsilon(b-a). \tag{15.9}$$

Combinando (15.7), (15.8) y (15.9) concluimos que

$$S(f,P) - s(f,Q) < S(f,P,\Xi) - s(f,Q,\Lambda) + 2\varepsilon(b-a) < \varepsilon(1 + 2(b-a)).$$

es decir, la **diferencia entre una suma inferior** $s(f,Q)$ **y una suma superior** $S(f,P)$ **puede hacerse arbitrariamente chica** con tal de que elegir las particiones P y Q con norma suficientemente chica.

Más aún, **esta propiedad caracteriza a la funciones integrables**. En efecto, sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función con dicha propiedad, esto es, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si P y Q son particiones de $[a,b]$ con $\Delta P < \delta$ y $\Delta Q < \delta$, entonces $S(f,P) - s(f,Q) < \varepsilon$. Si Ξ y Λ son elecciones de puntos para P y Q, entonces tenemos que

$$s(f,P) \leq S(f,P,\Xi) \leq S(f,P), \quad s(f,Q) \leq S(f,Q,\Lambda) \leq S(f,Q).$$

(ítem 1 del Ejercicio 14.1.6). De esto deducimos que

$$-\varepsilon < s(f,P) - S(f,Q) \leq S(f,P,\Xi) - S(f,Q,\Lambda) \leq S(f,P) - s(f,Q) < \varepsilon.$$

En conclusión, tenemos el siguiente enunciado.

Teorema 15.1.10. *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada*[1] *es integrable si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si P y Q son dos particiones con $\Delta P < \delta$ y $\Delta Q < \delta$, entonces $0 \leq S(f,P) - s(f,Q) < \varepsilon$.*

Ejemplo 15.1.11. *Sea $0 < a < b$ y consideremos nuevamente la integral definida $\int_a^b x^2 dx$. Sean $P := \{x_0, \dots, x_n\}$ y $Q := \{y_0, \dots, y_m\}$ dos particiones cualesquiera del intervalo $[a,b]$. Dado que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ es una función creciente, si $z_{i-1} < z_i$ son dos puntos del intervalo $[a,b]$, entonces $\text{ínf}\{f(x) : x \in [z_{i-1}, z_i]\} = f(z_{i-1})$ y $\sup\{f(x) : x \in [z_{i-1}, z_i]\} = f(z_i)$. En consecuencia, tenemos que*

$$S(f,P) - s(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i - \sum_{j=1}^{m} y_{j-1}^2 \Delta y_j.$$

A fin de estimar superiormente esta diferencia, recordamos que $S(f,Q) - s(f,P) \geq 0$ (Ejercicio 14.1.6), y por lo tanto,

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,Q) &\leq S(f,P) - s(f,P) + S(f,Q) - s(f,Q) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2)\Delta x_i + \sum_{j=1}^{m} (y_j^2 - y_{j-1}^2)\Delta y_j. \end{aligned}$$

Argumentando como en el Ejemplo 15.1.9 concluimos que $0 \leq S(f,P) - s(f,Q) \leq 2b(b-a)(\Delta P + \Delta Q)$ lo que demuestra que $S(f,P) - s(f,Q) < \varepsilon$ si P y Q son suficientemente finas.

La condición de Riemann de integrabilidad

El siguiente paso es expresar la integrabilidad en términos de la diferencia entre las sumas inferiores y superiores de f correspondientes a **una misma partición**. Sea $\varepsilon > 0$. De acuerdo con nuestra caracterización de la integrabilidad en términos de sumas inferiores y superiores (Teorema 15.1.10) tenemos que existe $\delta > 0$ tal que, si P es una partición con $\Delta P < \delta$, entonces

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon. \tag{15.10}$$

A su vez, esta última condición, aparentemente más débil, es de hecho equivalente a la integrabilidad de la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en consideración. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que existe $\delta > 0$ tal que se satisface (15.10) para cada partición P con $\Delta P < \delta$. Dadas dos particiones P y Q con $\Delta P < \delta$ y $\Delta Q < \delta$, tenemos que $s(f,P) \leq S(f,Q)$ (ítem 2 del Ejercicio 14.1.6), y por lo tanto,

$$0 \leq S(f,P) - s(f,Q) \leq S(f,P) - s(f,P) + S(f,Q) - s(f,Q) < 2\varepsilon.$$

En conclusión, tenemos el siguiente enunciado.

Teorema 15.1.12 (Condición de Riemann de integrabilidad)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es integrable si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada partición*

[1] Como vamos a ver más adelante (Lema 15.2.1), las funciones integrables son acotadas, por lo que la hipótesis de acotación de f en este enunciado no restringe su generalidad.

P de $[a,b]$ con $\Delta P < \delta$ tenemos que

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

Ejemplo 15.1.13. *Analizamos si la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ para $x \neq 1$, $f(1) := 2$ es integrable en $[0,1]$. Sea $P := \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición arbitraria de $[0,1]$. Dado que f es una función creciente, en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ alcanza el ínfimo en x_{i-1} y el supremo en x_i. Por lo tanto,*

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)\Delta x_i \;&=\; \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 - x_{i-1}^2)\Delta x_i + (2 - x_{n-1}^2)\Delta x_n \\ &\leq\; \Delta P\Bigg(\sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 - x_{i-1}^2) + (2 - x_{n-1}^2) \Bigg). \end{aligned}$$

La sumatoria en la última expresión es "telescópica" y se reduce a $2 - x_0^2 = 2$. Concluimos entonces que $S(f,P) - s(f,P) \leq 2\Delta P$, de lo cual, por la condición de Riemann de integrabilidad (Teorema 15.1.12), deducimos que f es integrable en $[0,1]$.

Un punto interesante en la nueva caracterización de la noción de integrabilidad es que, como se aprecia en el Ejemplo 15.1.13 precedente, la diferencia $S(f,P) - s(f,P)$ adquiere una forma particularmente simple. En efecto,

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i.$$

La diferencia $M_i - m_i$ coincide con lo que hemos denominado la **oscilación**

$$\omega(f, [x_{i-1}, x_i]) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

de f en $[x_{i-1}, x_i]$ en nuestra discusión sobre la noción de módulo de continuidad (Ejercicio 10.3.12 de la Sección 10.3.1). Más precisamente, tenemos el siguiente enunciado.

Lema 15.1.14. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces*

$$\omega(f, [a,b]) = \sup f([a,b]) - \inf f([a,b]).$$

Demostración. Observamos en primer lugar que $\sup f([a,b]) - \inf f([a,b])$ es una cota superior para $\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a,b]\}$. En efecto, si x, y son elementos arbitrarios de $[a,b]$, y suponemos sin pérdida de generalidad que $f(x) \leq f(y)$, entonces

$$\inf f([a,b]) \leq f(x) \leq f(y) \leq \sup f([a,b]),$$

de donde concluimos que $|f(x) - f(y)| \leq \sup f[a,b] - \inf f[a,b]$, y por lo tanto, que $\omega(f, [a,b]) \leq \sup f([a,b]) - \inf f([a,b])$.

Por otro lado, supongamos que la imagen $f([a,b])$ consta de al menos dos elementos (en caso contrario el resultado es evidente). Entonces existen sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $[a,b]$ tales

que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf f([a,b])$ y $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \sup f([a,b])$. Como $\inf f([a,b]) < \sup f([a,b])$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) < f(y_n)$ para cada $n \geq n_0$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} |f(y_n) - f(x_n)| = \lim_{n\to\infty} \big(f(y_n) - f(x_n)\big) = \sup f([a,b]) - \inf f([a,b]).$$

Tenemos entonces que $\sup f([a,b]) - \inf f([a,b])$ es una cota superior del conjunto $\{|f(x) - f(y)| : x,y \in [a,b]\}$ y existe una sucesión de elementos de $\{|f(x) - f(y)| : x,y \in [a,b]\}$ que converge a $\sup f([a,b]) - \inf f([a,b])$. Esto concluye la demostración. □

En resumen, tenemos las siguientes caracterizaciones de la integrabilidad.

Teorema 15.1.15 (Distintas caracterizaciones de la integrabilidad). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es integrable en $[a,b]$.*
2. *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si P y Q son particiones de $[a,b]$ con $\Delta P < \delta$ y $\Delta Q < \delta$ y Ξ y Λ son elecciones de puntos para P y Q respectivamente, entonces*

$$|S(f,P,\Xi) - s(f,Q,\Lambda)| < \varepsilon.$$

3. *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si P es una partición de $[a,b]$ con $\Delta P < \delta$, entonces*

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

4. *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a,b]$ con $\Delta P < \delta$, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, [x_{i-1}, x_i])\Delta x_i < \varepsilon.$$

Demostración. Solo tenemos que combinar los resultados que hemos demostrado hasta aquí. En efecto, la equivalencia entre 1 y 2 es la caracterización ε–δ de la integrabilidad (Teorema 15.1.6), la equivalencia entre 1 y 3 es el enunciado de la caracterización de Riemann de la integrabilidad (Teorema 15.1.12), en tanto que la equivalencia entre 3 y 4 es una consecuencia inmediata del Lema 15.1.14. □

15.2. Clases de funciones integrables que no son continuas

Las diversas caracterizaciones de la integrabilidad (Teorema 15.1.15) nos permiten establecer algunas propiedades de las funciones integrables y extender nuestro “catálogo” de funciones integrables.

15.2.1. Propiedades de las funciones integrables

Comenzamos con una propiedad que ya hemos mencionado: una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **integrable es necesariamente acotada**.

Lema 15.2.1 (Acotación de las funciones integrables)**.** *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable. Entonces f es acotada.*

Demostración. Supongamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función que no es acotada. Esto significa que existe una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $[a,b]$ tal que $\lim_{k\to\infty}|f(a_k)|=\infty$. En particular, por el Teorema de Bolzano–Weierstrass (Teorema 8.2.5) tenemos que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente a $\alpha\in[a,b]$. En consecuencia, sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $\lim_{k\to\infty}a_k=\alpha$ y que $f(a_k)>0$ para cada $k\in\mathbb{N}$.

Dados $\varepsilon>0$ y $\delta>0$ arbitrarios, afirmamos que si P es una partición de $[a,b]$ con $\Delta P<\delta$, entonces existen dos sumas de Riemann $S(f,P,\Xi)$ y $S(f,P,\Lambda)$ tales que

$$|S(f,P,\Xi)-S(f,P,\Lambda)|\geq\varepsilon. \tag{15.11}$$

Así, de acuerdo con la caracterización ε–δ de la integrabilidad (Teorema 15.1.6 o condición 2 del Teorema 15.1.15) podremos concluir que f no es integrable en $[a,b]$.

Para esto, sea $P:=\{x_0,\dots,x_n\}$ una partición de $[a,b]$ con $\Delta P<\delta$ y fijemos $i\in\{1,\dots,n\}$ de forma tal que $\alpha\in[x_{i-1},x_i]$ y existen infinitos $k\in\mathbb{N}$ tales que $a_k\in[x_{i-1},x_i]$. Sea $\Xi:=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ una elección de puntos de $[a,b]$ para P y sea Ξ_k la elección de puntos para P que obtenemos reemplazando ξ_i por a_k para cada $k\in\mathbb{N}$, es decir, $\Xi_k:=(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},a_k,\xi_{i+1},\dots,\xi_n)$. Tenemos entonces que, si $m\neq i$, el m–ésimo sumando $f(\xi_m)\Delta x_m$ en las sumas de Riemann $S(f,P,\Xi)$ y $S(f,P,\Xi_k)$ coincide, ya que el punto $\xi_m\in[x_{m-1},x_m]$ que elegimos en ambas sumas es el mismo. En consecuencia,

$$S(f,P,\Xi_k)-S(f,P,\Xi)=f(a_k)\Delta x_i-f(\xi_i)\Delta x_i=\big(f(a_k)-f(\xi_i)\big)\Delta x_i\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

Esto prueba que existen dos elecciones de puntos Ξ, $\Lambda:=\Xi_{k_0}$ para P de modo tal que se satisface (15.11). Esto concluye la demostración. □

Otra propiedad importante de las funciones integrables es la "aditividad del dominio", es decir, el hecho de que podemos establecer la integrabilidad de una función en un intervalo $[a,b]$ demostrando que ésta se verifica en dos subintervalos $[a,c]$ y $[c,b]$.

Lema 15.2.2 (Aditividad del dominio)**.** *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función y sea $c\in(a,b)$. Entonces f es integrable en $[a,b]$ si y solo si f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$.*

Demostración. Supongamos que f es integrable en $[a,b]$, fijemos $\varepsilon>0$ y sea $\delta>0$ que satisface la condición de Riemann de integrabilidad (Teorema 15.1.12 o condición 3 del Teorema 15.1.15) en $[a,b]$. Si P es una partición de $[a,c]$ con $\Delta P<\delta$, entonces podemos completarla a una partición Q de $[a,b]$ con $\Delta Q<\delta$. Dado que

$$S(f,P)-s(f,P)\leq S(f,Q)-s(f,Q)<\varepsilon,$$

concluimos que f es integrable en $[a,c]$. Un argumento similar prueba que f es integrable en $[c,b]$. Recíprocamente, si f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$, fijemos $\varepsilon>0$ y sea $\delta_0>0$ que satisface la condición de Riemann de integrabilidad (Teorema 15.1.12 o condición 3 del Teorema 15.1.15)

tanto en $[a,c]$ como en $[c,b]$. Sea $P := \{x_0,\ldots,x_n\}$ una partición de $[a,b]$ con $\Delta P < \delta$ ($\delta > 0$ a determinar), y sean $P' := \{x_0,x_1\ldots,x_{i-1},c\}$ y $P'' := \{c,x_i,\ldots,x_n\}$. Entonces tenemos que

$$S(f,P)-s(f,P)\leq \omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i+S(f,P')-s(f,P')+S(f,P'')-s(f,P'')<2K\delta+2\varepsilon,$$

donde K es una cota superior para $|f|$ en $[a,b]$. Así, eligiendo $\delta \leq \text{mín}\{\delta_0, \varepsilon/2K\}$ resulta $S(f,P)-s(f,P) < 3\varepsilon$. Esto prueba que f es integrable en $[a,b]$. □

Ejemplo 15.2.3. *A partir de las propiedades de las funciones integrables que hemos demostrado podemos "ampliar" el catálogo de funciones integrables. En tal sentido, afirmamos que* **el producto de dos funciones integrables es una función integrable**.

En efecto, sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones integrables y sea $P := \{x_0,\ldots,x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. De acuerdo con la caracterización de la integrabilidad en término de la oscilación (condición 4 del Teorema 15.1.15), analizamos la suma

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(fg,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i.$$

Dado que f y g son integrables, resultan acotadas (Lema 15.2.1), por lo que existe $K>0$ tal que $|f(x)|\leq K$ y $|g(x)|\leq K$ para cada $x\in[a,b]$. Si $x,y\in[x_{i-1},x_i]$, entonces

$$|f(x)g(x)-f(y)g(y)|\leq|f(x)||g(x)-g(y)|+|g(y)||f(x)-f(y)|\leq K|g(x)-g(y)|+K|f(x)-f(y)|.$$

Por ende, $\omega(fg,[x_{i-1},x_i])\leq K\omega(f,[x_{i-1},x_i])+K\omega(g,[x_{i-1},x_i])$ para $1\leq i\leq n$. Así,

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(fg,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i\leq K\sum_{i=1}^{n}\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i+K\sum_{i=1}^{n}\omega(g,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i.$$

Sea $\varepsilon>0$. Dado que f y g son integrables en $[a,b]$, de la integrabilidad por oscilaciones (condición 4 del Teorema 15.1.15) tenemos que existe $\delta>0$ tal que si $\Delta P<\delta$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i<\varepsilon \ \text{ y } \ \sum_{i=1}^{n}\omega(g,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i<\varepsilon.$$

Esto demuestra que $\sum_{i=1}^{n}\omega(fg,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i\leq 2K\varepsilon$, lo que prueba que fg es integrable.

Ejercicio 15.2.4. *Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones integrables.*

1. *Demostrar que $f+g$ es integrable en $[a,b]$.*

2. *Demostrar que si existe $K>0$ tal que $|g(x)|\geq K$ para cada $x\in[a,b]$, entonces f/g es integrable en $[a,b]$.*

Ejercicio 15.2.5. *Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones integrables.*

1. *Demostrar que $|f|$ y $|g|$ son integrables en $[a,b]$.*

2. *Sean $h_1,h_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $h_1(x):=\text{máx}\{f(x),g(x)\}$ y $h_2(x):=\text{mín}\{f(x),g(x)\}$. Demostrar que h_1 y h_2 son integrables.* (Sugerencia: probar que $h_1=(f+g)/2+|f-g|/2$ y $h_2=(f+g)/2-|f-g|/2$.)

15.2.2. Funciones acotadas con finitas discontinuidades

A fin de extender el "catálogo" de funciones integrables, comenzamos demostrando que las funciones $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **acotadas** que tienen a lo sumo **finitas discontinuidades** en $[a,b]$ son integrables. Para esto, analizamos en primer lugar las funciones acotadas cuyas discontinuidades se sitúan en el borde del intervalo en consideración.

Lema 15.2.6. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada que es continua en (a,b). Entonces f es integrable en $[a,b]$.*

Demostración. Supongamos que $|f(x)|\leq K$ para todo $x\in[a,b]$. Sea $\varepsilon>0$ y sean $c,d\in(a,b)$ tales que $c<d$, $b-d<\varepsilon$ y $c-a<\varepsilon$. Además, dado que f es continua en $[c,d]$, sea $\delta>0$ tal que el módulo de continuidad $\omega(f;\delta)$ de f en $[c,d]$ es menor que ε. Finalmente, sea $P:=\{x_0,\ldots,x_n\}$ una partición de $[a,b]$ tal que $\Delta P<\text{mín}\{\varepsilon,\delta\}$. Entonces, si $i_0:=\text{mín}\{i:c\leq x_i\}$ e $i_1:=\text{máx}\{i:x_i\leq d\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}|S(f,P,\Xi)-S(f,Q,\Lambda)| &\leq 2K\sum_{i=1}^{i_0}\Delta x_i+\sum_{i=i_0+1}^{i_1}\omega(f;[x_{i-1},x_i])\Delta x_i+2K\sum_{i=i_1+1}^{n}\Delta x_i\\ &\leq 4K\varepsilon+\sum_{i-i_0+1}^{i_1}\omega(f;\delta)\Delta x_i+4K\varepsilon=\varepsilon(8K+b-a).\end{aligned}$$

Esto demuestra el enunciado del lema. □

La "aditividad del dominio" de las funciones integrables (Lema 15.2.2) nos permite generalizar el resultado precedente. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 15.2.7. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada tal que tiene finitas discontinuidades en $[a,b]$. Entonces f es integrable.*

Demostración. Sean $a\leq x_0<x_1<\cdots<x_n\leq b$ las discontinuidades de f en $[a,b]$. Fijemos $i\in\{1,\ldots,n\}$. Tenemos entonces que f es integrable en $[x_{i-1},x_i]$, dado que es continua en (x_{i-1},x_i) y acotada en $[x_{i-1},x_i]$ (Lema 15.2.6). Así, aplicando reiteradamente la aditividad de la integral (Lema 15.2.2), vemos que f es integrable en $[a,b]$. □

Ejemplo 15.2.8. *Del resultado anterior concluimos que la función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x):=\text{sen}(1/x)$ si $x\neq 0$ y $f(0):=0$ es integrable, ya que posee una única discontinuidad en $x=0$.*

Ejemplo 15.2.9. *Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x):=1$ si $x\notin\mathbb{Q}$ y $f(x):=0$ si $x\in\mathbb{Q}$. Entonces f no es integrable en $[0,1]$. De hecho, si $P:=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ es una partición arbitraria de $[0,1]$, por la densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, tenemos que $\text{ínf}\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}=0$ y $\sup\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}=1$. En consecuencia, $s(f,P)=0$ y $S(f,P)=1$, de lo que deducimos fácilmente que f no es integrable en $[0,1]$.*

Vemos entonces que una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada con infinitas discontinuidades en $[a,b]$ no necesariamente es integrable, por lo que el enunciado del Corolario 15.2.7 no puede ser generalizado al caso de infinitas discontinuidades.

Las funciones convexas son integrables

Una consecuencia importante de los resultados precedentes de integrabilidad de funciones no necesariamente continuas (Lema 15.2.6 y Corolario 15.2.7) es que las funciones convexas son integrables. En efecto, sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ convexa. Tenemos entonces que, para cada $t\in[0,1]$, $f(ta+(1-t)b)\le tf(a)+(1-t)f(b)\le \text{máx}\{f(a),f(b)\}$. Por otro lado, cada punto $x\in[a,b]$ puede expresarse en la forma $x=(a+b)/2+y$, siendo $|y|<(b-a)/2$. Dado que

$$\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+y\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-y\right),$$

concluimos que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}+y\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}-y\right).$$

Por lo tanto,

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}+y\right)\ge 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}-y\right)\ge 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\text{máx}\{f(a),f(b)\}.$$

Invirtiendo el signo de las desigualdades en nuestros argumentos deducimos que una función cóncava es acotada. Así, hemos demostrado el siguiente enunciado.

Lema 15.2.10. *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es convexa o cóncava, entonces es acotada.*

Por otro lado, tenemos que una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ convexa o cóncava es necesariamente continua en (a,b) (ver, por ejemplo, [NP06, Theorem 1.3.3]). Combinando este resultado con el hecho de que f es acotada (Lema 15.2.10) vemos que f satisface las hipótesis de nuestro resultado de integrabilidad de funciones no necesariamente continuas (Lema 15.2.6), por lo que obtenemos la siguiente conclusión.

Lema 15.2.11. *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es convexa o cóncava, entonces es integrable.*

Las funciones monótonas son integrables

Nuestro tercer resultado sobre la integrabilidad de funciones no necesariamente continuas concierne las funciones **monótonas** (crecientes o decrecientes).

Lema 15.2.12. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función monótona. Entonces f es integrable.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que f es creciente. Es claro que f es acotada. Sea $P:=\{x_0,\ldots,x_n\}$ una partición arbitraria de $[a,b]$ y consideremos la suma inferior $s(f,P)$ y superior $S(f,P)$ asociadas a f. Dado que $f(x_{i\ 1})\le f(x)\le f(x_i)$ para cada $x\in[x_{i\ 1},x_i]$, tenemos que

$$S(f,P)-s(f,P)=\sum_{i-1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\Delta x_i\le\Delta P\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))=\Delta P(f(b)-f(a)).$$

Así vemos que la diferencia $S(f,P)-s(f,P)$ se puede hacer arbitrariamente “chica” si la partición P es suficientemente fina. Esto concluye la demostración. □

Ejemplo 15.2.13. *La función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lfloor x \rfloor$ *es monótona, por lo que es integrable en cualquier intervalo* $[a,b]$.

Ejercicio 15.2.14. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función tal que existe una partición* $\{x_0, \dots, x_n\}$ *de* $[a,b]$ *tal que* $f|_{[x_{i-1},x_i]}$ *es monótona o continua para* $1 \leq i \leq n$. *Demostrar que* f *es integrable en* $[a,b]$.

16. Integración definida III: funciones derivables

En los dos capítulos anteriores hemos visto que la integral definida de una función integrable es el límite de sucesiones de aproximaciones, que representan la integral definida de figuras más simples (uniones rectángulos en el caso de las sumas de Riemann o uniones de trapecios en el método de los trapecios). Así, en general, la integral definida de una función dada no resulta fácil de determinar. De todas maneras, hemos obtenido, trabajosamente, fórmulas explícitas para la integral definida de ciertas funciones elementales, tales como las polinómicas y ciertos tipos simples de funciones racionales y exponenciales. El presente capítulo está dedicado a estudiar la relación entre los procesos de derivación e integración definida, relación que ha permitido ampliar de manera significativa el catálogo de funciones para las que se dispone de fórmulas explícitas de su integral definida en un intervalo arbitrario, a la vez que permite obtener información fundamental sobre el comportamiento de la integración definida.

16.1. El Teorema fundamental del cálculo

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable. Por la "aditividad del dominio" (Lema 15.2.2) tenemos que f es integrable en cada intervalo $[a,x]$ con $x\in[a,b]$, y por lo tanto, la función $F:[a,b]\to\mathbb{R}$,

$$F(x):=\int_a^x f(t)dt, \tag{16.1}$$

está bien definida. Nuestro objetivo es estudiar esta función. Comenzamos observando que F es **Lipschitz continua** en $[a,b]$. De hecho, dado que f es integrable, resulta acotada (Lema 15.2.1), y por lo tanto, existe $K\geq 0$ tal que $|f(x)|\leq K$ para cada $x\in[a,b]$. En consecuencia,

$$|F(x)-F(y)|=\left|\int_a^x f(t)dt-\int_a^y f(t)dt\right|=\left|\int_x^y f(t)dt\right|\leq\int_x^y|f(t)|dt\leq K|x-y|$$

para cada par de puntos $x,y\in[a,b]$ con $x<y$. Así, tenemos el siguiente enunciado.

Lema 16.1.1. *La función F de (16.1) es Lipschitz continua.*

Más aún, tenemos el siguiente resultado clave, que establece **una relación entre la integración y la derivación**, que denominamos la **primera forma del Teorema fundamental del cálculo**.

Teorema 16.1.2 (Teorema fundamental del cálculo - primera forma)**.** *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una fun-*

ción integrable y sea $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ la función

$$F(x):=\int_a^x f(t)dt. \tag{16.2}$$

Si f es continua en $c\in[a,b]$, entonces F es derivable en c y $F'(c)=f(c)$[1].

Demostración. Sea $\varepsilon>0$. Por la continuidad de f en c tenemos que existe $\delta>0$ tal que $|f(t)-f(c)|<\varepsilon$ para todo $t\in[a,b]$ tal que $|t-c|<\delta$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $[c,c+\delta)\subset[a,b]$. Entonces, si $0<h<\delta$, tenemos que

$$\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h}-f(c)\right|=\left|\frac{1}{h}\left(\int_a^{c+h}f(t)dt-\int_a^c f(t)dt\right)-f(c)\right|=$$

$$=\frac{1}{h}\left|\int_c^{c+h}f(t)dt-hf(c)\right|=\frac{1}{h}\left|\int_c^{c+h}(f(t)-f(c))dt\right|\le\frac{1}{h}\int_c^{c+h}|f(t)-f(c)|dt\le\frac{1}{h}\varepsilon h=\varepsilon.$$

La demostración para el caso $h<0$ sigue de forma similar. □

Corolario 16.1.3. *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua, entonces la función F de (16.2) es derivable en $[a,b]$ y $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in[a,b]$.*

Ejercicio 16.1.4. *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua y $g,h:[a,b]\to[a,b]$ son funciones derivables en $[a,b]$, demostrar que la función*[2]

$$F:[a,b]\to\mathbb{R},\quad F(x):=\int_{g(x)}^{h(x)}f(t)dt$$

es derivable en $[a,b]$ y $F'(x)=f(h(x))h'(x)-f(g(x))g'(x)$ para cada $x\in[a,b]$.

Una función F como en el Corolario 16.1.3 se dice una **primitiva** de f. De acuerdo con el Corolario 16.1.3, **toda función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ posee una primitiva**.

Una observación importante en relación con el concepto de primitiva es que **dos primitivas de la misma función difieren en una constante**. En efecto, si $G_1:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $G_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ son dos funciones continuas que son primitivas de una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ en (a,b), entonces $G_1'(x)=G_2'(x)$ para cada $x\in(a,b)$. Por lo tanto, la derivada de la función G_1-G_2 se anula en cada punto $x\in(a,b)$, de lo que concluimos que G_1-G_2 es constante, esto es, existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $G_1(x)-G_2(x)=\lambda$ para cada $x\in[a,b]$. En particular, si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua y G es una primitiva de f, dado que, por el corolario de la primera forma del Teorema fundamental del cálculo (Corolario 16.1.3), la función F de (16.2) es continua (Lema 16.1.1) y una primitiva de f, tenemos que existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal $F(x)-G(x)=\lambda$ para cada $x\in[a,b]$. En consecuencia,

$$G(b)-G(a)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx-\int_a^a f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

[1] En el caso en que $c=a$ o $c=b$, la derivada correspondiente es la derivada **por izquierda o derecha**, esto es, el límite del cociente incremental por izquierda o derecha, según corresponda.

[2] Con la convención de que $\int_c^c f(t)dt:=0$ y $\int_d^c f(t)dt:=-\int_c^d f(t)dt$ si $c<d$.

Así, tenemos el siguiente resultado, que a veces se denomina la segunda forma del Teorema fundamental del cálculo.

Corolario 16.1.5. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua y sea $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua que es una primitiva de f en (a,b). Entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a).$$

Ejemplo 16.1.6. *Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ la función $f(x):=\sqrt{1-x^2}$ y consideremos la función $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definida por*

$$F(x):=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{2}.$$

Observamos que F es continua, dado que es la suma de dos funciones continuas (ambas inversas de funciones continuas definidas en un intervalo (Teorema 10.2.18)). Asimismo, por medio de un cálculo directo es fácil comprobar que F es una primitiva de f en $[-1,1]$. En consecuencia, si $[a,b]\subset[-1,1]$, entonces

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = F(b)-F(a) = \frac{b}{2}\sqrt{1-b^2}+\operatorname{arc\,sen}(b)-\Big(\frac{a}{2}\sqrt{1-a^2}+\operatorname{arc\,sen}(a)\Big).$$

En particular, si $a:=-1$ y $b:=1$, concluimos que

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\operatorname{arc\,sen}(1)}{2}-\frac{\operatorname{arc\,sen}(-1)}{2} = \frac{\pi}{4}-\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)=\frac{\pi}{2},$$

lo cual coincide con la definición de geométrica de $\pi/2$, como el área del semicírculo de radio 1 (Sección 6.4.1).

Ejemplo 16.1.7 (La fórmula de Gregory–Leibniz para π). *En este ejemplo aplicamos la expresión de la integral definida de una función continua en términos de una primitiva de la misma (Corolario 16.1.5) a fin de obtener una serie que converge al número π. De acuerdo con dicho resultado, tenemos que*

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4},$$

dado que $\arctan(x)$ *es una primitiva para $1/(1+x^2)$ (Ejercicio 11.2.10). Por otro lado, tenemos la siguiente identidad*

$$\frac{1}{1+t^2} = 1-t^2+t^4+\cdots+(-1)^n t^{2n}+(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Integrando entre 0 y 1 deducimos que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt.$$

Observamos que la integral definida en el término de la derecha de la expresión anterior tiende a

0 cuando n tiende a infinito. En efecto,

$$\left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt\right| \leq \int_0^1 t^{2n+2}dt = \frac{1}{2n+3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Así obtenemos la siguiente **fórmula de Gregory–Leibniz** *para el número π:*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots$$

Ejercicio 16.1.8. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^n y sea p_n su n–ésimo polinomio de Taylor en $\alpha \in (a,b)$. Si F es una primitiva de f en (a,b), demostrar que*

$$q_{n+1}(x) := f(\alpha) + \int_\alpha^x p_n(t)dt$$

es el $(n+1)$–ésimo polinomio de Taylor de F en α.

Ejercicio 16.1.9. *Sea $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ la función $f(x) := \ln(1+x^2)$. Determinar el n–ésimo polinomio de Taylor de f en 0 para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Ejercicio 16.1.10. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f(0) = 0$ y $f'(x) = f(x)^2$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $f(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.* (Sugerencia: a fin de demostrar que $f(x) = 0$ para cada $x \geq 0$, suponiendo que no es así, integrar f entre x_0 y x, donde $x_0 := \text{ínf}\{x \geq 0 : f(x) > 0\}$.)

16.1.1. Primitivas de funciones no necesariamente continuas

Como hemos dicho, si bien a veces el Corolario 16.1.5 precedente se conoce como otra forma del Teorema fundamental del cálculo, nosotros vamos a denominar **la segunda forma del Teorema fundamental del cálculo** al siguiente resultado, que expresa la relación clave que existe entre las integrales y las primitivas **prescindiendo de la hipótesis de continuidad de la función** f en consideración.

Teorema 16.1.11 (Teorema fundamental del cálculo - segunda forma)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $[a,b]$ que posee una primitiva $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demostración. Dado que f no es necesariamente continua, no podemos aplicar el Corolario 16.1.5, por lo que vamos a analizar las correspondientes sumas de Riemann. Sea $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición arbitraria de $[a,b]$ y sea $[x_{i-1}, x_i]$ un intervalo cualquiera definido por esta partición. De acuerdo con el Teorema del valor medio (Teorema 12.1.4), tenemos que existe $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(\xi_i). \tag{16.3}$$

Si llamamos $\Xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ a la elección de puntos para P que obtenemos aplicando el Teorema

del valor medio en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, entonces

$$S(f,P,\Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) = F(b) - F(a). \tag{16.4}$$

Consideremos una sucesión de particiones $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[a,b]$ tal que $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$ y sea $(\Xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de elecciones de puntos de $[a,b]$ para $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que obtenemos aplicando el Teorema del valor medio como en (16.3). Dado que f es una función integrable en $[a,b]$ y $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$, por (16.4) tenemos que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n,\Xi_n) = F(b) - F(a).$$

Esto concluye la demostración. □

Hasta aquí solo hemos definido la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ de una función cuando $a < b$. En vistas de la segunda forma del Teorema fundamental del cálculo, en determinadas situaciones resulta conveniente extender **formalmente** la definición de integral definida de una función integrable a casos en los que $a \geq b$, definiendo

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

La segunda forma del Teorema fundamental del cálculo (Corolario 16.1.5 o Teorema 16.1.11) asegura que el cálculo de la integral definida en un intervalo $[a,b]$ de una función integrable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se realiza fácilmente si se conoce una función continua $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ que es una primitiva de f en (a,b). El cálculo de una primitiva es lo que conoce como la **integración indefinida**, precisamente por su relación con la integración definida. Los dos ejercicios que siguen contienen resultados que permiten simplificar la cuestión y constituye el fundamento de dos técnicas fundamentales para la integración indefinida: los métodos de **sustitución** e **integración por partes**.

Ejercicio 16.1.12 (Cambio de variable). *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ dos funciones con $g([c,d]) \subset [a,b]$.*

1. *Si f es continua, g es derivable y g' es integrable, entonces*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(t)dt = \int_c^d f\big(g(t)\big)g'(t)dt. \tag{16.5}$$

2. *Si f es integrable, g es monótona y derivable y g' es integrable, entonces la conclusión del ítem anterior continúa siendo válida.*

Ejercicio 16.1.13 (Integración por partes). *Si $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son dos funciones derivables tales que f' y g' son integrables, demostrar que*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx. \tag{16.6}$$

Ejemplo 16.1.14. *Ilustramos la aplicación de las técnicas de sustitución e integración por partes en un ejemplo simple: se trata de determinar la integral definida*

$$\int_0^1 \arctan(x)dx.$$

A fin de determinar esta integral, observamos que, si expresamos la función a integrar $x \mapsto \arctan(x)$ *como el producto* $f'(x) \cdot g(x) := 1 \cdot \arctan(x)$, *aplicando la fórmula de integración por partes (16.6) tenemos que*

$$\int_0^1 \arctan(x)dx = 1 \cdot \arctan 1 - 0 \cdot \arctan 0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx.$$

A fin de determinar la integral definida del término de la derecha, observamos que la expresión $2x/(1+x^2)$ *a integrar se puede escribir en la forma* $f(g(x))g'(x)$, *siendo* $f(x) := 1/x$ *y* $g(x) := 1+x^2$. *Así podemos aplicar el método de sustitución (16.5), que en este caso nos da la siguiente identidad:*

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln 2.$$

En definitiva, tenemos que

$$\int_0^1 \arctan(x)dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Ejemplo 16.1.15 (La fórmula de Wallis). *En este ejemplo aplicamos integración por partes de forma reiterada a fin de establecer una conocida fórmula para el número* π. *Para* $n \in \mathbb{N}$, *consideramos la integral definida*

$$S_n := \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx.$$

A fin de reducir el exponente n *en la integral, aplicamos integración por partes: escribimos la expresión* $\operatorname{sen}^n x$ *a integrar en la forma* $f'(x) \cdot g(x) := \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^{n-1} x$, *siendo* $f(x) := -\cos x$. *Así, suponiendo que* $n \geq 2$, *tenemos que*

$$\begin{aligned} S_n &= -(\operatorname{sen}^{n-1}x \cos x)\big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}x \cos^2 x\, dx \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}x(1-\operatorname{sen}^2 x)\, dx = (n-1)(S_{n-2} - S_n), \end{aligned}$$

de donde deducimos la siguiente fórmula recursiva:

$$S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}. \tag{16.7}$$

Supongamos ahora que n *es par. Teniendo en cuenta que* $S_0 = \pi/2$, *aplicando sucesivamente (16.7) obtenemos la identidad*

$$S_{2n} = \frac{2n-1}{2n} S_{2n-2} = \cdots = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}.$$

Por otro lado, si n es impar, teniendo en cuenta que $S_1 = 1$*, de (16.7) concluimos que*

$$S_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} S_{2n-1} = \cdots = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{2}{3}.$$

Dado que $0 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ *si* $x \in [0, \pi/2]$*, tenemos que* $\operatorname{sen}^{2n+1} x \leq \operatorname{sen}^{2n} x \leq \operatorname{sen}^{2n-1} x$ *para* $x \in [0, \pi/2]$*, y por lo tanto,* $S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_{2n-1}$*. En consecuencia,*

$$1 \leq \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} = \frac{\pi}{2}(2n+1)\left(\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2}\right)^2 \leq \frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}.$$

Por la propiedad sandwich (Lema 3.1.35) deducimos que $\lim_{n\to\infty} S_{2n}/S_{2n+1} = 1$*, o equivalentemente, que*

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2 \cdot (2n-2)^2}{1 \cdot 3^2 \cdots (2n-1)^2 \cdot (2n+1)},$$

lo que se conoce como la **fórmula de Wallis** *para el número* π*.*

Ejercicio 16.1.16 (Irracionalidad de π). *El objetivo del presente ejercicio es obtener una demostración de la irracionalidad de* π*. Para esto, seguimos la versión de [BM04, §6.5] de una demostración debida a I. Niven [Niv47].*

1. *Sea* $I_n(r) := \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \cos(rx)dx$*. Demostrar que*

$$I_0(r) = \frac{2\operatorname{sen} r}{r}, \quad I_1(r) = \frac{4(\operatorname{sen} r - r\cos r)}{r^3},$$
$$I_n(r) = \frac{1}{r^2}\big(2n(2n-1)I_{n-1}(r) - 4n(n-1)I_{n-2}(r)\big) \quad (n \geq 2).$$

2. *Deducir del ítem anterior que existen polinomios* $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}[x]$ *tales que*

$$I_n(r) = \frac{n!}{r^{2n+1}}\big(P_n(r)\operatorname{sen} r - Q_n(r)\cos r\big). \tag{16.8}$$

3. *Suponiendo que* $\pi = a/b$ *con* $a, b \in \mathbb{Z}$*, especializar (16.8) en* $r = \pi/2 = a/2b$ *y concluir que*

$$\left(\frac{a}{2b}\right)^{2n+1} In\left(\frac{a}{2b}\right) = n! P_n\left(\frac{a}{2b}\right).$$

Limpiar denominadores y deducir que $a^{2n+1} I_n(a/2b)/n! \in \mathbb{Z}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*.*

4. *Demostrar que* $|I_n(r)| \leq 2$ *para cada* $r \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$*.*

5. *Deducir que* $\lim_{n\to\infty} a^{2n+1} I_n(a/2b)/n! = 0$*, y por lo tanto,* $I_n(a/2b) = 0$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Esta contradicción implica que* π *no puede ser un número racional.*

16.1.2. El error de los métodos de aproximación de la integral definida

El Teorema fundamental del cálculo no solo permite establecer fórmulas explícitas para la integral definida de ciertas funciones, como hemos visto, sino que también nos permite obtener

informaciones más precisas sobre el comportamiento de ciertos tipos de integrales definidas. En esta sección vamos a determinar el comportamiento asintótico de los errores de aproximación de la integral definida de una función de clase C^1 o C^2 por medio de sumas de Cauchy y el método de los trapecios.

El error de la aproximación por sumas de Cauchy

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 en $[a,b]$ y sea $P_n := \{x_0, \ldots, x_n\}$ la partición de $[a,b]$ que consiste de nodos equiespaciados, es decir,

$$x_i := a + \frac{i(b-a)}{n} \quad (0 \leq i \leq n).$$

En nuestro análisis del error en la aproximación de la integral definida de f por la suma de Cauchy $L(f,P_n)$ hemos obtenido la siguiente estimación (Teorema 14.3.4): si $|f'(x)| \leq M$ para cada $x \in [a,b]$, entonces

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L(f,P_n) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}. \tag{16.9}$$

Así vemos que dicho error Δ_n es, a lo sumo, del orden de $1/n$. Nuestro propósito es refinar dicha estimación, proveyendo información más precisa sobre el comportamiento de la cantidad $n\Delta_n$ cuando n tiende a infinito.

Para esto, recordamos que, en la demostración de (16.9) habíamos obtenido la siguiente expresión:

$$\Delta_n := \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(x_{i-1})\Delta x_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f'(c_i)(\Delta x_i)^2,$$

donde $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ para $1 \leq i \leq n$. Teniendo en cuenta que $\Delta x_i = (b-a)/n$ para $1 \leq i \leq n$, de la identidad precedente concluimos que

$$n\Delta_n = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n f'(c_i)\Delta x_i.$$

Sea $C_n := (c_1, \ldots, c_n)$. El punto clave es que la sumatoria del término de la derecha es de hecho la suma de Riemann $S(f', P_n, C_n)$ de la función f' en $[a,b]$. Dado que f' es continua, y por lo tanto integrable (Teorema 15.1.2), por la definición de integral definida deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} n\Delta_n = \frac{b-a}{2} \lim_{n\to\infty} S(f', P_n, C_n) = \frac{b-a}{2} \int_a^b f'(x)dx = \frac{b-a}{2}(f(b) - f(a)),$$

donde la última identidad es consecuencia del Teorema fundamental del cálculo (Teorema 16.1.11). Así obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 16.1.17. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y sea $P_n := \{x_0, \ldots, x_n\}$ la partición de $[a,b]$ definida por $x_i := a + i(b-a)/n$ $(0 \leq i \leq n)$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^b f(x)dx - L(f,P_n) \right) = \frac{1}{2}(b-a)(f(b) - f(a)).$$

Ejemplo 16.1.18. *Consideremos nuevamente la función $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$ del Ejemplo 14.1.12. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Si $P_n := \{x_0, \ldots, x_n\}$ es la partición definida por $x_i := (n+i)/n$ $(0 \leq i \leq n)$, aplicando la estimación del error de la aproximación de la integral definida por sumas de Cauchy (Teorema 14.3.4) habíamos concluimos que*

$$\left| \int_1^2 \frac{1}{x} dx - L(f, P_n) \right| \leq \frac{1}{2n}$$

(ver Ejemplo 14.3.5). A su vez, estudiando los errores que habíamos listamos en la Tabla 14.1, habíamos observado que

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx - L(f, P_n) \approx -\frac{1}{4n}.$$

Este comportamiento se explica precisamente en los términos del Teorema 16.1.17, que asegura que, en este caso,

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\int_1^2 \frac{1}{x} dx - L(f, P_n) \right) = \frac{1}{2}(2-1)\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}.$$

Ejercicio 16.1.19. *Estudiar el comportamiento asintótico del error de la aproximación de las integrales definidas del Ejercicio 14.1.13 por sumas de Cauchy con nodos equiespaciados como en el Teorema 16.1.17. Tabular los errores correspondientes y comparar con el comportamiento asintótico previsto.*

El error de la aproximación del método de los trapecios

Utilizando el mismo tipo de argumentos que en la determinación del comportamiento asintótico del error de la aproximación por sumas de Cauchy (Teorema 16.1.17) es posible obtener información sobre el comportamiento de otros métodos de aproximación de la integral definida de una función dada. Nuestro propósito en lo que sigue es analizar los errores en el método de los trapecios (Sección 14.3.3).

Recordamos que, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 en $[a,b]$ y $P_n := \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a,b]$ con nodos equiespaciados, es decir,

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n} \quad (0 \leq i \leq n), \tag{16.10}$$

el método de los trapecios consiste de la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n := \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right). \tag{16.11}$$

En el Ejercicio 14.3.7 hemos obtenido la siguiente expresión del error de la integral definida de f en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$: existe $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta x_i = -\frac{1}{12} f''(c_i) \Delta x_i^3.$$

Ejercicio 16.1.20. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2.*

1. *Si $P_n := \{x_0, \ldots, x_n\}$ es la partición definida como en (16.10), demostrar que existe una elección de puntos $C_n := (c_1, \ldots, c_n)$ para P_n tal que*

$$\Delta_n^T := \int_a^b f(x)dx - T_n = -\frac{1}{12}\sum_{i-1}^{n} f''(c_i)\Delta x_i^3.$$

2. *Concluir que*

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \Delta_n^T = -\frac{(b-a)^2}{12}\big(f'(b) - f'(a)\big). \qquad (16.12)$$

Ejemplo 16.1.21. *En la aplicación del método de los trapecios a fin de aproximar la integral definida de la función $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$ en el intervalo $[1,2]$ del Ejemplo 14.3.9, hemos observamos que*

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx - T_n \approx -\frac{1}{16n^2}.$$

La expresión (16.12) del comportamiento asintótico de los errores confirma esta observación empírica. En efecto, si aplicamos (16.12) en este caso vemos que

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \Delta_n^T = -\frac{(2-1)^2}{12}\big(f'(2) - f'(1)\big) = -\frac{1}{16}.$$

16.1.3. Una expresión integral del error en el Teorema de Taylor

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $\alpha \in (a,b)$. En la Sección 12.2 hemos obtenido aproximaciones de f en un entorno de α por medio del n–ésimo polinomio de Taylor p_n de f en α. Asimismo, en el Teorema 12.2.25 hemos obtenido una expresión del error que cometemos en dicha aproximación: si f es $n+1$ veces derivable en (a,b), existe $c \in \text{int}(\alpha, x)$ tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1}.$$

Nuestro propósito en esta sección es obtener otra expresión de la diferencia $f - p_n$ por medio de integrales.

Comenzamos con el caso $n = 1$, es decir, se trata de obtener una expresión integral para la diferencia

$$f(x) - p_1(x) = f(x) - f(\alpha) - f'(\alpha)(x-\alpha),$$

siendo $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dos veces derivable y f'' integrable. Por el Teorema Fundamental del Cálculo (Teorema 16.1.11) tenemos que $f(x) - f(\alpha) = \int_\alpha^x f'(t)\,dt$. Vamos a integrar esta última integral por partes (Ejercicio 16.1.13): si reescribimos a $f'(t)$ como el producto $1 \cdot f'(t)$ y $u, v : (a,b) \to \mathbb{R}$ son las funciones definidas por $u(t) := t - x$ y $v(t) := f'(t)$, tenemos que $f'(t) = 1 \cdot f'(t) =$

$u'(t)\cdot v(t)$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x)-f(\alpha)=\int_\alpha^x f'(t)\,dt=\int_\alpha^x u'(t)v(t)dt &= u(x)v(x)-u(\alpha)v(\alpha)-\int_\alpha^x u(t)v'(t)dt \\ &= -(\alpha-x)f'(\alpha)+\int_\alpha^x (x-t)f''(t)dt. \end{aligned}$$

Así obtenemos la siguiente expresión integral de la diferencia $f-p_1$:

$$f(x)-p_1(x)=f(x)-f(\alpha)-f'(\alpha)(x-\alpha)=\int_\alpha^x (x-t)f''(t)dt. \tag{16.13}$$

Supongamos ahora que f es tres veces derivable y f''' es integrable. Partiendo de (16.13), vamos a integrar por partes la integral de la derecha de la expresión anterior. Para esto, consideramos las funciones $u,v:(a,b)\to\mathbb{R}$ definidas por $u(t):=-\frac{1}{2}(x-t)^2$ y $v(t):=f''(t)$ y observamos que $(x-t)f''(t)=u'(t)v(t)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^x (x-t)f''(t)dt &= u(x)v(x)-u(\alpha)v(\alpha)-\int_\alpha^x u(t)v'(t)dt \\ &= \frac{1}{2}(x-\alpha)^2 f''(\alpha)+\int_\alpha^x \frac{1}{2}(x-t)^2 f'''(t)dt. \end{aligned}$$

En consecuencia, deducimos que

$$f(x)-p_1(x)-\frac{1}{2}(x-\alpha)^2 f''(\alpha)=f(x)-p_2(x)=\int_\alpha^x \frac{1}{2}(x-t)^2 f'''(t)dt.$$

Esto demuestra el caso $n=2$ y da una idea de cómo proceder en general. Argumentando inductivamente, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 16.1.22 (Expresión integral para el error del polinomio de Taylor)**.** *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable tal $f^{(n+1)}$ es integrable en (a,b) y sea $\alpha\in(a,b)$. Entonces, para cada $x\in(a,b)$,*

$$f(x)-p_n(x)=\int_\alpha^x \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Ejercicio 16.1.23. *Completar la demostración del Teorema 16.1.22.* (Sugerencia: analizar el caso $n=3$.)

Ejemplo 16.1.24. *En el Ejercicio 12.2.18 habíamos mostrado que el n–ésimo polinomio p_n de Taylor de la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x):=\ln x$ en 1 está dado por*

$$p_n(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

Asimismo, en el Ejercicio 12.2.28 habíamos utilizado la expresión explícita del error en la aproximación por el polinomio de Taylor del Teorema 12.2.25 a fin de demostrar que, para cada $x\in[1/2,2]$, resulta

$$\ln x=\lim_{n\to\infty} p_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}. \tag{16.14}$$

Nos proponemos aplicar la forma integral del error del Teorema 16.1.22 a fin de demostrar que la identidad (16.14) resulta válida para cada $x \in (0,2)$.

Teniendo en cuenta que $f^{(n+1)}(t) = -n!/(-t)^{n+1}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *tenemos la siguiente expresión del error de aproximar* $\ln x$ *por el polinomio* $p_n(x)$*:*

$$\ln x - p_n(x) = -\int_1^x \frac{1}{n!}(x-t)^n \frac{n!}{(-t)^{n+1}}\,dt = \int_1^x \frac{1}{t}\left(\frac{t-x}{t}\right)^n dt.$$

Fijemos $x \in (0,2)\setminus\{1\}$. *Tenemos dos casos:*

- *si* $x \in (1,2)$, *entonces* $t \in [1,x]$, *y por lo tanto,* $|t-x|/t = (x-t)/t \leq x-1$;
- *si* $x \in (0,1)$, *entonces* $t \in [x,1]$, *y por lo tanto,* $|t-x|/t = (t-x)/t \leq 1-x$.

Sea $\varepsilon > 0$. *Las estimaciones previas aseguran que existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\left|\frac{t-x}{t}\right|^n < \varepsilon$$

para cada $n \geq n_0$. *Por lo tanto, si* $n \geq n_0$ *tenemos que*

$$|\ln x - p_n(x)| = \left|\int_1^x \frac{1}{t}\left(\frac{t-x}{t}\right)^n dt\right| \leq \int_1^x \frac{1}{t}\left|\frac{t-x}{t}\right|^n dt < \varepsilon|\ln x|.$$

Esto demuestra que (16.14) es válida para cada $x \in (0,2)$.

Ejercicio 16.1.25 (Forma de Cauchy del error). *Sea* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *una función* $n+1$ *veces derivable tal que* $f^{(n+1)}$ *es integrable en* (a,b) *y sea* $\alpha \in (a,b)$. *Demostrar que existe* $c \in \operatorname{int}(x,\alpha)$ *tal que*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-\alpha).$$

(Sugerencia: aplicar el Teorema del valor medio para integrales (Teorema 14.3.1) a la expresión integral del error del Teorema 16.1.22.)

Ejercicio 16.1.26. *Sea* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *y sea* $f : (-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ *la función* $f(x) := (1+x)^\alpha$.

1. *Demostrar que el n–ésimo polinomio de Taylor de* f *en un entorno de* $x = 0$ *es*

$$p_n(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

2. *Sea* $x \in (-1,1)$ *fijo. Demostrar que la sucesión* $\big(p_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $f(x)$. (Sugerencia: utilizar la expresión del error de Cauchy.)

3. *Expresemos el límite* $\lim_{n\to\infty} p_n(x)$ *en la forma*

$$(1+x)^\alpha = \lim_{n\to\infty} p_n(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Usando la identidad $(a+b)^\alpha = a^\alpha(1+\frac{b}{a})^\alpha$*, demostrar que si* $a>0$ *y* $|b|<a$*, se tiene el siguiente* **Teorema del binomio de Newton generalizado***:*

$$(a+b)^\alpha = a^\alpha + \frac{\alpha}{1}a^{\alpha-1}b + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}a^{\alpha-2}b^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{\alpha-3}b^3 + \cdots$$

16.2. Integrales impropias

Frecuentemente surge la necesidad de definir una noción de integral definida de funciones $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ continuas y **no necesariamente acotadas**, es decir, dotar de sentido a integrales del tipo $\int_0^1 \ln(x)\,dx$. Más aún, puede ser importante considerar integrales de funciones continuas (o con finitas discontinuidades) en **intervalos infinitos**, como por ejemplo $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$. Este tipo de integrales se denominan **integrales impropias**.

16.2.1. Integrales impropias en intervalos finitos

Consideremos en primer lugar una función $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ que es integrable en cada intervalo $[c,b]$ con $c\in(a,b]$. Definimos la **integral impropia** $\int_a^b f(x)dx$ como el límite

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{h\to 0^+}\int_{a+h}^b f(x)dx,$$

siempre que este límite exista (en cuyo caso diremos que la integral $\int_a^b f(x)dx$ **converge**, en tanto que en caso contrario diremos que ésta **diverge**). De modo similar, si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es una función integrable en cada intervalo $[\alpha,\beta]$ con $\alpha,\beta\in(a,b)$ y c es punto arbitrario de (a,b), definimos la integral impropia de f en $[a,b]$ en la forma

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{h\to 0^+}\int_{a+h}^c f(x)dx + \lim_{h\to 0^-}\int_c^{b+h} f(x)dx. \tag{16.15}$$

Más generalmente, sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable en cada intervalo $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ que no contenga a los puntos $c_1<c_2<\cdots<c_{r-1}$ del intervalo $[a,b]$. Si llamamos $c_0:=a$ y $c_r:=b$, definimos su integral impropia en el intervalo $[a,b]$ por

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{k=1}^r \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx,$$

siempre que cada una de las integrales impropias $\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx$ exista.

Ejemplo 16.2.1. *Estudiamos la convergencia de la integral impropia* $\int_0^1 \ln x\,dx$*. Teniendo en cuenta que la función* $g:(0,1]\to\mathbb{R}$ *definida por* $g(x):=x(\ln x-1)$ *es una primitiva de la función* $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x):=\ln x$*, vemos que*

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{h\to 0^+}\int_h^1 \ln x\,dx = g(1) - \lim_{h\to 0^+} g(h) = -1 - \lim_{h\to 0^+} h(\ln h - 1) = -1.$$

Concluimos entonces que la integral impropia $\int_0^1 \ln x\,dx$ *converge a* -1.

Ejemplo 16.2.2. *Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ y $a < b$, analizamos la convergencia de la integral impropia $\int_a^b (x-a)^{-\alpha}\,dx$. Si $\alpha \neq 1$, tenemos que*

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{a+h}^{b}\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\,dx=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & si\ \alpha<1,\\ \infty & si\ \alpha>1.\end{cases}$$

Asimismo, para $\alpha = 1$, tenemos que

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{a+h}^{b}\frac{1}{(x-a)}\,dx=\lim_{h\to 0^+}\big(\ln(b-a)-\ln h\big)=\infty.$$

En resumen, tenemos entonces que

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{a+h}^{b}\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\,dx=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & si\ \alpha<1,\\ \infty & si\ \alpha\geq 1.\end{cases}$$

Este análisis nos va a permitir determinar la convergencia de varias integrales impropias por "comparación".

Ejercicio 16.2.3. *Demostrar que $\int_0^1 x^{-1}(-\ln x)^{\mu}\,dx$ diverge para cada $\mu \in \mathbb{R}$.*

Ejercicio 16.2.4. *Demostrar que, si existe, la definición (16.15) de la integral impropia es independiente del punto $c \in (a,b)$ considerado.*

Criterio de convergencia de Cauchy

El análisis de la convergencia de integrales impropias comparte varias características con el de series. En tal sentido, nuestro primer resultado es análogo al criterio de Cauchy de convergencia para series (Lema 9.3.12).

Lema 16.2.5 (Criterio de Cauchy de convergencia)**.** *Sea $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable en cada intervalo $[c,b]$ con $c\in(a,b]$. Entonces la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si y solo si para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que, si $0<h_1\leq h_2<\delta$, entonces*

$$\left|\int_{a+h_1}^{a+h_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon. \tag{16.16}$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge, es decir, existe $I\in\mathbb{R}$ tal que $\lim_{h\to 0^+}\int_{a+h}^b f(x)\,dx = I$. Dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que

$$\left|\int_{a+h}^{b} f(x)\,dx - I\right|<\varepsilon$$

para cada $0 \leq h < \delta$. Esto implica que, si $0 < h_1 \leq h_2 < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_{a+h_1}^{a+h_2} f(x)\,dx\right| &= \left|\int_{a+h_1}^{b} f(x)\,dx - \int_{a+h_2}^{b} f(x)\,dx\right| \\ &\leq \left|\int_{a+h_1}^{b} f(x)\,dx - I\right| + \left|I - \int_{a+h_2}^{b} f(x)\,dx\right| < 2\varepsilon,\end{aligned}$$

lo que demuestra la primera afirmación del enunciado.

En cuanto a la afirmación recíproca, consideramos el límite $\lim_{h\to 0^+} \int_{a+h}^{b} f(x)dx$ por sucesiones, dado que la condición (16.16) es de hecho un análogo "continuo" del concepto de sucesión de Cauchy. Si $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathbb{R}_{>0}$ que converge a 0, entonces (16.16) implica que la sucesión $\left(\int_{a+h_n}^{b} f(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y por lo tanto, converge en $\mathbb{R}$. Sean ahora $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(h''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de $\mathbb{R}_{>0}$ que convergen a 0 y sean I' e I'' los correspondientes límites de las integrales definidas, es decir,

$$I' := \lim_{n\to\infty} \int_{a+h'_n}^{b} f(x)dx, \quad I'' := \lim_{n\to\infty} \int_{a+h''_n}^{b} f(x)dx.$$

Queremos ver que $I' = I''$. Sean $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, entonces

$$\left|\int_{a+h'_n}^{b} f(x)dx - I'\right| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \left|\int_{a+h''_n}^{b} f(x)dx - I''\right| < \varepsilon.$$

En consecuencia,

$$|I' - I''| \leq \left|I' - \int_{a+h'_n}^{b} f(x)dx\right| + \left|\int_{a+h'_n}^{b} f(x)dx - \int_{a+h''_n}^{b} f(x)dx\right| + \left|\int_{a+h''_n}^{b} f(x)dx - I''\right| < 3\varepsilon.$$

Dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $I' = I''$. Deducimos entonces que el límite $\lim_{n\to\infty} \int_{a+h_n}^{b} f(x)dx$ existe y es independiente de la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en consideración, de lo que concluimos, por la caracterización de los límites continuos por sucesiones (10.1.14), que la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ converge. □

Ejemplo 16.2.6. *Analizamos con el criterio de Cauchy la convergencia de la integral impropia $\int_0^1 \sqrt{-\ln x}\,dx$. Sean $0 \leq h_1 < h_2$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $h_2 < e^{-1}$. Esto implica que $-\ln x > 1$ para cada $x \in [h_1, h_2]$, y por lo tanto,*

$$\int_{h_1}^{h_2} \sqrt{-\ln x}\,dx \leq \int_{h_1}^{h_2} -\ln x\,dx.$$

Dado que la integral impropia $\int_0^1 \ln x\,dx$ converge (Ejemplo 16.2.1), el criterio de Cauchy de convergencia (Lema 16.2.5) asegura que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\int_{h_1}^{h_2} -\ln x\,dx| < \varepsilon$ si $0 \leq h_1 < h_2 < \delta$. Por lo tanto,

$$\left|\int_{h_1}^{h_2} \sqrt{-\ln x}\,dx\right| \leq \left|\int_{h_1}^{h_2} -\ln x\,dx\right| < \varepsilon$$

si $0 \leq h_1 < h_2 < \delta$, lo cual implica, de acuerdo con el criterio de Cauchy de convergencia (Lema

16.2.5), que la integral impropia $\int_0^1 \sqrt{-\ln x}\,dx$ converge. Cabe destacar que $\int_0^1 \sqrt{-\ln x}\,dx$ converge a $\sqrt{\pi}/2$ (ver [BM04, página 190]).

Convergencia absoluta

El ejemplo precedente (Ejemplo 16.2.6) ilustra una estrategia básica en el análisis de la convergencia de integrales impropias: la comparación de la función a integrar con una de comportamiento conocido. Supongamos que queremos analizar la convergencia de la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable en cada intervalo $[c,b]$ con $c \in (a,b]$. Si la función f **no cambia de signo en el intervalo** $[a,b]$, digamos por caso que $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a,b]$, y $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [a,b]$, donde $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función cuya integral impropia $\int_a^b g(x)dx$ converge, entonces inmediatamente obtenemos una “buena” acotación superior de la integral $\int_{a+h_1}^{a+h_2} f(x)\,dx$ para cada $0 < h_1 \leq h_2$, a partir de lo cual, por el criterio de Cauchy de convergencia (Lema 16.2.5) concluimos que la integral impropia de f en $[a,b]$ converge. Ésta es la idea del criterio de comparación que discutimos en el ejercicio a continuación.

Ejercicio 16.2.7 (Criterio de comparación para funciones positivas)**.** *Sean $f,g : (a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables en cada intervalo $[c,b]$ con $c \in (a,b]$ tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [a,b]$. Demostrar las siguientes afirmaciones:*

1. *si la integral impropia $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ converge;*
2. *si la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge.*

Ejercicio 16.2.8. *Demostrar que $\int_0^1 (-\ln x)^\mu\,dx$ converge para cada $\mu > 0$.* (Sugerencia: comparar con $x^{-1/2}(-\ln x)^\mu$.)

Ejercicio 16.2.9. *Demostrar que $\int_0^1 x^\alpha(-\ln x)^\mu\,dx$ diverge para cada $\alpha < -1$ y $\mu > 0$.* (Sugerencia: comparar con $x^{-1}(-\ln x)^\mu$.)

El criterio de comparación del Ejercicio 16.2.7 sugiere que el análisis de las integrales impropias se simplifica si la función en consideración no cambia de signo. Consideramos ahora una función $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[c,b]$ para cada $c \in (a,b]$ que cambia de signo en el intervalo $(a,b]$. Observamos que el valor absoluto de una función integrable es integrable (Ejercicio 15.2.5), por lo que tiene sentido considerar la integral impropia $\int_a^b |f(x)|\,dx$. Prosiguiendo la analogía con el análisis de la convergencia de series, tenemos la siguiente definición.

Definición 16.2.10 (Convergencia absoluta)**.** *Sea $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[c,b]$ para cada $c \in (a,b]$. Decimos que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$* **converge absolutamente** *si la integral impropia $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge.*

Ejemplo 16.2.11. *Afirmamos que la integral impropia $\int_0^1 x^{\ 1/2}\,\mathrm{sen}(1/x)\,dx$ converge absolutamente. En efecto, teniendo en cuenta que $|x^{-1/2}\,\mathrm{sen}(1/x)| \leq x^{-1/2}$ para cada $x \in (0,1]$, por el criterio de comparación (Ejercicio 16.2.7) y el hecho de que la integral impropia $\int_0^1 x^{\ 1/2}\,dx$ converge (Ejemplo 16.2.2) concluimos que $\int_0^1 x^{-1/2}|\mathrm{sen}(1/x)|\,dx$ converge. Esto demuestra que la integral $\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{sen}(1/x)\,dx$ converge absolutamente.*

De forma similar a lo que ocurre en el caso de series (Lema 9.3.23), la convergencia absoluta de una integral impropia implica la convergencia de la misma, como afirmamos en el resultado a continuación.

Lema 16.2.12. *Sea $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[c,b]$ para cada $c \in (a,b]$. Si la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ converge absolutamente, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.*

Demostración. Observamos que, si $0 < h_1 \leq h_2$, entonces

$$\left| \int_{a+h_1}^{a+h_2} f(x)\,dx \right| \leq \int_{a+h_1}^{a+h_2} |f(x)|\,dx. \tag{16.17}$$

Dado que la integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, el criterio de Cauchy de convergencia (Lema 16.2.5) asegura que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{a+h_1}^{a+h_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon$$

si $0 < h_1 \leq h_2 < \delta$. Esto implica que la misma estimación es válida para el término de la izquierda en (16.17), de lo cual, por el criterio de Cauchy de convergencia, concluimos que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ converge. □

Ejemplo 16.2.13. *Prosiguiendo con el Ejemplo 16.2.11, en el cual demostramos que la integral impropia $\int_0^1 x^{-1/2}\operatorname{sen}(1/x)\,dx$ converge absolutamente, por el resultado precedente concluimos que la integral impropia $\int_0^1 x^{-1/2}\operatorname{sen}(1/x)\,dx$ converge.*

Criterios de comparación para la convergencia absoluta

Combinando el hecho de que una integral impropia absolutamente convergente resulta convergente con el criterio de convergencia para funciones positivas del Ejercicio 16.2.7, deducimos el siguiente criterio de comparación general.

Lema 16.2.14 (Criterio de comparación)**.** *Sean $f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables en cada intervalo $[c,b]$ con $c \in (a,b]$. Si $|f(x)| \leq g(x)$ para cada $x \in (a,b]$ y la integral impropia $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^b f(x)dx$ converge absolutamente.*

El Ejemplo 16.2.13 es un caso particular del criterio de comparación precedente, donde la comparación se realiza con una función del tipo $(x-a)^\alpha$, cuyo comportamiento estudiamos en el Ejemplo 16.2.2. Este tipo particular de comparaciones suele ser de utilidad en las aplicaciones, por lo que lo enunciamos por separado.

Corolario 16.2.15 (Criterio de comparación con potencias)**.** *Sea $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en cada intervalo $[c,b]$ con $c \in (a,b]$.*

- *Si existen $M > 0$ y $\alpha > -1$ tales que $|f(x)| \leq M(x-a)^\alpha$ para cada $x \in (a,b]$, entonces la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.*
- *Si existen $M > 0$ y $\alpha \leq -1$ tales que $f(x) \geq M(x-a)^\alpha$ para cada $x \in (a,b]$, entonces la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.*

Ejercicio 16.2.16. *Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:*

$$\int_0^1 x^{-1}\operatorname{sen}^2 x^{-1}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,dx.$$

Una consecuencia útil de nuestro criterio de comparación para la convergencia absoluta (Lema 16.2.14) es el siguiente **criterio de comparación del límite**.

Lema 16.2.17 (Criterio de comparación del límite)**.** *Sean $f,g:(a,b]\to\mathbb{R}$ dos funciones positivas e integrables en cada intervalo $[c,b]$ con $c\in(a,b]$ tales que*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell>0. \tag{16.18}$$

Entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si y solo si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge.

Demostración. Sea $\varepsilon>0$ tal que $\ell-\varepsilon>0$. Por (16.18) existe $\delta>0$ tal que

$$\ell-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<\ell+\varepsilon$$

para cada $x\in(a,a+\delta)$. Así concluimos que

$$0\le f(x)<(\ell+\varepsilon)g(x) \quad \text{y} \quad 0\le g(x)<(\ell-\varepsilon)^{-1}f(x)$$

para cada $x\in(a,a+\delta)$. Aplicando el criterio de comparación para la convergencia absoluta (Lema 16.2.14) deducimos inmediatamente el enunciado. □

Ejemplo 16.2.18. *Analizamos la convergencia de la integral impropia $\int_0^1 f(x)\,dx$, donde $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ es la función definida por $f(x):=(x^3+2x^5+x^9)^{-1/2}$. Si $g:(0,1]\to\mathbb{R}$ es la función $g(x):=x^{-3/2}$, tenemos que*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^3+2x^5+x^9}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1+2x^2+x^6}}=1.$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que $\int_0^1 x^{-3/2}\,dx$ diverge (Ejemplo 16.2.2), concluimos que $\int_0^1 f(x)\,dx$ diverge.

Ejercicio 16.2.19. *Analizar la convergencia de $\int_0^\pi \operatorname{sen}^\alpha x\,dx$ para cada $\alpha<0$.*

Ejercicio 16.2.20. *Sean $f,g:(a,b]\to\mathbb{R}$ dos funciones positivas e integrables en cada intervalo $[c,b]$ con $c\in(a,b]$. Demostrar que:*

1. *si $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x)=0$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ converge;*

2. *si $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x)=\infty$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.*

Aproximación numérica de integrales impropias de funciones no acotadas

Hasta acá hemos discutido criterios que nos permiten asegurar que una integral impropia converge. En algunos casos, como cuando se trata de funciones que tienen una primitiva fácil de evaluar, el Teorema fundamental del cálculo nos permite obtener expresiones explícitas de tales integrales. Sin embargo, en la mayoría de los casos solo será posible aproximar numéricamente la integral impropia de una función dada. Nuestro propósito en esta sección es mencionar brevemente algunos métodos de aproximación de una integral impropia convergente del tipo $\int_a^b f(x)\,dx$.

En primer lugar, cabe observar que, en algunos casos con un comportamiento particularmente bueno, es posible obtener aproximaciones razonables truncando la integral, esto es, calculando aproximaciones a una integral definida del tipo $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$, con $\varepsilon > 0$ "chico". En el ejercicio a continuación discutimos uno de estos casos.

Ejercicio 16.2.21 ([PS78, Part Two, §I.3.20]). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función monótona en (a,b) tal que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ converge. Sea $P_n := \{x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\}$ la partición de $[a,b]$ que consiste de $n+1$ nodos equiespaciados y sea $f_i^{(n)}$ $(0 \le i \le n)$ el valor que toma f en tales nodos, esto es,*

$$h := \frac{b-a}{n}, \quad x_i^{(n)} := a + ih \quad (0 \le i \le n), \quad f_i^{(n)} := f(x_i^{(n)}) \quad (0 \le i \le n).$$

1. *Suponiendo que f es creciente en (a,b), demostrar que*

$$\int_a^{b-h} f(x)\,dx \le h\big(f_1^{(n)} + f_2^{(n)} + \cdots + f_{n-1}^{(n)}\big) \le \int_{a+h}^b f(x)\,dx.$$

2. *Concluir que* $\lim\limits_{n\to\infty} h\big(f_1^{(n)} + f_2^{(n)} + \cdots + f_{n-1}^{(n)}\big) = \int_a^b f(x)\,dx.$

Ejemplo 16.2.22. *Supongamos que queremos estimar la integral impropia*

$$I := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx,$$

que converge a $5 - 6\ln 2 \approx 0{,}8411169166$*. De acuerdo con el ejercicio precedente, tenemos que, si $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ es la función $f(x) := (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^{-1}$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f\Big(\frac{1}{n}\Big) + f\Big(\frac{2}{n}\Big) + \cdots + f\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\right) = I. \tag{16.19}$$

En la Tabla 16.1 listamos algunos de las aproximaciones que obtenemos de esta manera. Cabe destacar que la convergencia es sumamente lenta.

Una estrategia más interesante consiste en "remover" la singularidad, para lo cual seguimos [IK94, §7.6]. Supongamos que queremos aproximar una integral de la forma

$$I := \int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^{\alpha}}\,dx, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{16.20}$$

Tabla 16.1.: Algunas aproximaciones a_n de la integral impropia $\int_0^1 (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^{-1} dx$.

n	a_n
100	0.8045053481
300	0.8231887109
500	0.8282422837
700	0.8307637590
1000	0.8328992784
1500	0.8347972464
2000	0.8358717885

donde $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^{r+1} en $[a,b]$ para cierto $r \geq 0$. Por el Teorema de Taylor con expresión explícita del error (Teorema 12.2.25) tenemos que

$$g(x) = p_r(x) + \frac{g^{(r+1)}(c)}{(r+1)!}(x-a)^{r+1}, \; p_r(x) := g(a) + g'(a)(x-a) + \cdots + \frac{g^{(r)}(a)}{r!}(x-a)^r,$$

donde $c \in \operatorname{int}(x,a)$. Así, la función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(a) := 0, \quad h(x) := \frac{g(x) - p_r(x)}{(x-a)^\alpha} \tag{16.21}$$

resulta de clase C^r en $[a,b]$. En consecuencia, si expresamos la integral impropia (16.20) en la forma

$$I = I_1 + I_2, \quad I_1 := \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b \frac{g(x) - p_r(x)}{(x-a)^\alpha}dx, \quad I_2 := \int_a^b \frac{p_r(x)}{(x-a)^\alpha}dx, \tag{16.22}$$

la integral I_2 puede evaluarse explícitamente:

$$I_2 = (b-a)^{1-\alpha}\left(\frac{g(a)}{1-\alpha} + \frac{g'(a)}{1!}\frac{(b-a)}{2-\alpha} + \cdots + \frac{g^{(r)}(a)}{r!}\frac{(b-a)^r}{r+1-\alpha}\right).$$

Por otro lado, dado que la función h de (16.21) es de clase C^r, la integral I_1 no es una integral impropia, y por lo tanto puede aproximarse con alguno de los métodos que hemos discutido. Si, por ejemplo, aproximamos I_1 con el método de los trapecios, de la estimación del error de dicho método (Ejercicio 14.3.8) tenemos el siguiente resultado.

Teorema 16.2.23. *La integral I_1 de (16.22), y por lo tanto la integral impropia (16.20), puede aproximarse con el método de los trapecios usando $n+1$ nodos equiespaciados con un error Δ_n^T acotado por*

$$|\Delta_n^T| \leq \frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}M,$$

siendo M una cota superior de la derivada segunda de la función h de (16.21).

Ejemplo 16.2.24. *Queremos aproximar numéricamente la integral impropia*

$$I := \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx. \tag{16.23}$$

El desarrollo de Taylor de $\cos x$ *en 0 de orden 2 es* $p_2(x) = 1 - x^2/2$*. Por lo tanto, siguiendo el método precedente, expresamos la integral impropia (16.23) en la forma*

$$I = I_1 + I_2 := \int_0^1 \frac{\cos x - p_2(x)}{\sqrt{x}}\,dx + \int_0^1 \frac{p_2(x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

La segunda integral se puede calcular explícitamente. En efecto, tenemos que

$$\int_0^1 \frac{p_2(x)}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 x^{-1/2}dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^{3/2}\,dx = 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8.$$

En cuanto a la primera integral, aproximándola por el método de los trapecios con $n = 100$ *intervalos, obtenemos el valor* $T_{100} = 0{,}009049629$*, que resulta una aproximación relativamente buena del valor exacto* $0{,}009048476\ldots$ *En definitiva, tenemos la aproximación* $1{,}809049629$*, que coincide en sus primeros cinco dígitos con el valor exacto* $1{,}809048476\ldots$

Ejercicio 16.2.25. *Para integral impropia (16.23) obtener, en función de n, una estimación del error del tipo de la del Teorema 16.2.23. Demostrar que el integrando correspondiente es una función monótona en* $(0,1]$ *y comparar con los resultados que se obtienen aplicando el Ejercicio 16.2.21.*

16.2.2. Integrales impropias en intervalos infinitos

Otro caso de interés es el de la integración de funciones continuas en intervalos no acotados. Sea $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua. Definimos la **integral impropia** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ como el límite

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{r\to+\infty} \int_a^r f(x)dx,$$

siempre que este límite exista. En tal caso, diremos que la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **converge**, en tanto que en caso contrario diremos que ésta **diverge**.

Ejemplo 16.2.26. *Sea* $f : [e,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/(x\ln x)$*. Dado que* $\int_e^r f(x)\,dx = \ln(\ln r)$*, concluimos que* $\int_e^{+\infty} f(x)dx$ *diverge.*

Ejercicio 16.2.27. *Demostrar que, si* $a < b$*, entonces*

$$\int_b^{+\infty} (x-a)^\alpha\,dx = \begin{cases} -\dfrac{(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} & si\ \alpha < -1, \\ \infty & si\ \alpha \geq -1. \end{cases}$$

Muchas de las consideraciones que hemos hecho para integrales impropias en intervalos finitos se extienden de forma similar a las integrales impropias sobre intervalos infinitos. En particular, tenemos el siguiente criterio de Cauchy de convergencia.

Teorema 16.2.28 (Criterio de Cauchy de convergencia). *Sea $f : [a,+\infty)$ una función integrable en cada intervalo $[a,c]$ con $c \geq a$. Entonces la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que, si $d > c > M$, entonces*

$$\left| \int_c^d f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Ejercicio 16.2.29. *Probar el criterio de Cauchy de convergencia del Teorema 16.2.28.*

Del mismo modo que en el caso de integrales impropias en intervalos finitos, los criterios de comparación resultan una herramienta fundamental a fin de determinar la convergencia de la integral impropia de una función dada en un intervalo no acotado. En el siguiente ejercicio consideramos varios criterios de convergencia.

Ejercicio 16.2.30 (Criterios de comparación). *Sean $f,g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ integrables en cada intervalo $[a,c]$ con $c \geq a$ tales que $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$ para cada $x \geq a$.*

1. *Probar que si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [a,+\infty)$ y la integral impropia $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.*
2. *Probar que si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [a,+\infty)$ y la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge.*
3. *Demostrar que si $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = \ell > 0$, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si y solo si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.*

Ejercicio 16.2.31 (La función Gamma). *Una función de particular importancia es la función Gamma $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.*

1. *Demostrar que la integral impropia $\Gamma(x)$ converge si $x > 0$.* (Sugerencia: considerar por separado la integral en $[0,1]$ y en $[1,+\infty)$ y aplicar los resultados de comparación (Corolario 16.2.15 y Ejercicio 16.2.30).)
2. *Aplicando integración por partes, demostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*
3. *Demostrar que $\Gamma(1) = 1$ y concluir que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Por último, en lo que respecta a la aproximación numérica de integrales impropias en intervalos no acotados, la situación es en general más complicada que en el caso de intervalos finitos. En el siguiente ejercicio consideramos el caso de las funciones monótonas (para casos más generales, ver [IK94, §6.3] o [DR07, Chapter 3]).

Ejercicio 16.2.32 ([PS78, Part Two, §I.4.30]). *Sea $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función monótona tal que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.*

1. *Suponiendo que f es creciente en $[a,+\infty)$, y dados $h > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, demostrar que*

$$\int_a^{(n+1)h} f(x)\,dx \leq h\big(f(h) + f(2h) + \cdots + f(nh)\big) \leq \int_a^{nh} f(x)\,dx.$$

2. *Concluir que*

$$\lim_{h\to 0^+} h\big(f(h)+f(2h)+\cdots+f(nh)+\cdots\big) = \lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

16.3. Longitud de curva

Si bien hemos introducido el concepto de integral definida en relación con el problema de determinar el área de ciertas regiones del plano, también podemos utilizar la integración definida a fin de obtener una noción de **longitud de curva**. Éste es el objetivo central de la presente sección.

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua. Nos proponemos "medir" la longitud de la curva $G(f)$ que define el gráfico de f, esto es,

$$G(f) := \{(x,f(x)) : x\in[a,b]\}$$

La idea es simple: si existiera una partición $x_0 := a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n := b$ del intervalo $[a,b]$ de modo tal que f resultara **lineal a trozos**, es decir, tal que la restricción $f|_{[x_{i-1},x_i]}$: $[x_{i-1},x_i]\to\mathbb{R}$ de f a cada intervalo $[x_{i-1},x_i]$ resultara una función lineal (ver la Figura 16.1), entonces concluiríamos que la longitud de la curva $G(f)$ es la suma de las longitudes de los segmentos $\ell_i(f)$ $(0\le i\le n)$ correspondientes, esto es,

$$\ell(f) = \sum_{i=1}^{n}\ell_i(f) = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}. \tag{16.24}$$

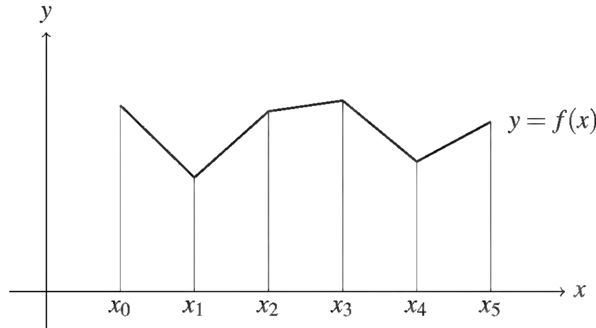


Figura 16.1.: Una función lineal a trozos $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ en cada intervalo $[x_{i-1},x_i]$.

Si ahora f es una función continua arbitraria, podemos aproximar dicha longitud eligiendo $n+1$ puntos en $G(f)$,

$$\{(x_i,f(x_i)) : x_0 := a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n := b\},$$

uniéndolos por medio de segmentos y considerando nuevamente la suma (16.24). Si aceptamos que la menor distancia entre dos puntos del plano es la longitud del segmento que los une, la suma (16.24) resultará entonces una estimación inferior de la longitud de la curva $G(f)$ (ver la

Figura 16.2). Así, argumentando como en la discusión sobre la noción de integral definida, sería de esperar que, a medida que consideramos particiones $P_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ cada vez más finas, las sumas (16.24) resulten progresivamente mejores aproximaciones de la longitud de la curva $G(f)$, de modo que, cuando la norma ΔP_n de las particiones tiende a 0, obtengamos la longitud de la curva $G(f)$.

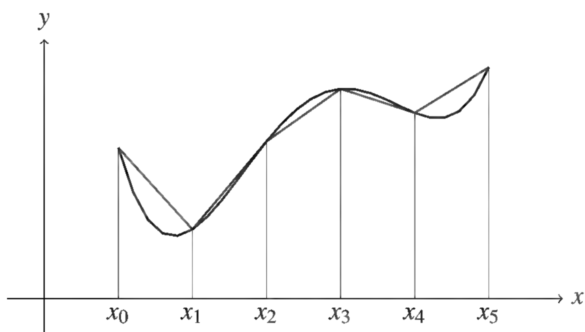


Figura 16.2.: Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y su aproximación lineal a trozos asociada a una partición $P := \{x_0, \ldots, x_5\}$ del intervalo $[a,b]$.

Sin embargo, esta idea no conduce necesariamente a una noción de longitud de la curva $G(f)$, dado que **no necesariamente dicha longitud es "finita"**. En efecto, consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera (ver la Figura 16.3):

- $f(0) := 0$;
- $f(1/2n) = 1/2n$ y $f(1/(2n-1)) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- f es lineal en cada intervalo $[1/(n+1), 1/n]$.

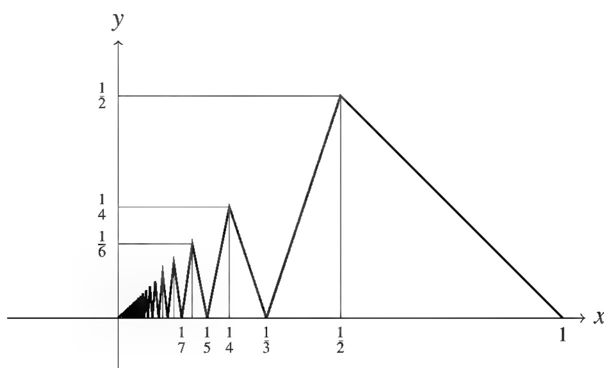


Figura 16.3.: El gráfico de una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y lineal a trozos cuya longitud no es finita.

Es fácil ver que f es una función continua. Asimismo, de acuerdo con nuestras consideraciones anteriores, si $G_n(f)$ es el gráfico de la función (lineal) $f|_{[1/(n+1),1/n]}$ y $\ell_n(f)$ es la longitud de dicho segmento, tenemos que

$$\ell(f) = \sum_{n\geq 1} \ell_n(f) \geq \sum_{n\geq 1} \ell_{2n-1}(f) \geq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}.$$

Concluimos que la suma de las longitudes de los segmentos correspondientes no resulta acotada, por lo que no tenemos una noción de longitud de la curva $G(f)$ en este caso.

16.3.1. Longitud de curva para el gráfico de una función C^1

Consideremos ahora una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en $[a,b]$ (o de clase C^1 en (a,b) con derivada acotada). Afirmamos que, en tal caso, las sumas (16.24) convergen, para cada sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de particiones de $[a,b]$ con $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$, a un número real positivo, que vamos a denominar la longitud de la curva $G(f)$.

En efecto, sea $P_n := \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}.$$

Aplicando el Teorema del valor medio (Teorema 12.1.4) en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ concluimos que existe $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}. \qquad (16.25)$$

Dado que $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, la composición $g := \sqrt{1 + (f')^2} : [a,b] \to \mathbb{R}$ también lo es, de lo que deducimos que es integrable en $[a,b]$. Asimismo, si llamamos $\Xi_n := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ a los puntos que obtenemos aplicando el Teorema del valor medio en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, vemos entonces que el término de la derecha en (16.25) es de hecho la suma de Riemann $S(g, P_n, \Xi_n)$. Si consideramos entonces una sucesión de particiones $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$, por la definición de integral definida de una función continua tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

En consecuencia, hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 16.3.1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\lim_{n\to\infty} \Delta P_n = 0$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Este resultado y nuestras consideraciones anteriores justifican la siguiente definición.

Definición 16.3.2 (Longitud de curva). *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función de clase C^1. Definimos* **la longitud** $\ell(f)$ **del gráfico** $G(f)$ *de f por*

$$\ell(f):=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Ejemplo 16.3.3. *Si bien basamos la definición de longitud de curva en el hecho de que sabemos medir la longitud de segmentos, apliquemos la definición de longitud de curva a fin de determinar la longitud del gráfico de una función lineal $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x):=mx+b$. Observamos que*

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

De acuerdo con la definición precedente, tenemos que

$$\ell(f)=\int_a^b\sqrt{1+m^2}dx=\sqrt{1+m^2}(b-a)=\sqrt{(b-a)^2+(f(b)-f(a))^2},$$

que coincide con la distancia euclídea entre los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$.

Ejemplo 16.3.4. *Determinamos la longitud del gráfico de la función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x):=\sqrt{1-x^2}$. A fin de aplicar la definición de longitud de curva, observamos que*

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

para cada $x\in(-1,1)$. Esta función no satisface las hipótesis del resultado sobre la convergencia de la longitud de las poligonales "inscriptas" en una curva (Teorema 16.3.1), dado que

$$\lim_{x\to-1^+}f'(x)=\lim_{x\to1^-}f'(x)=+\infty.$$

Por lo tanto, si existe, la longitud del gráfico de la función f resulta el valor de la integral impropia

$$\int_{-1}^1\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\lim_{h\to0^+}\int_{-1+h}^0\sqrt{1+(f'(x))^2}dx+\lim_{h\to0^-}\int_0^{1+h}\sqrt{1+(f'(x))^2}dx. \quad (16.26)$$

A fin de determinar el valor de esta integral, para cada $x\in(-1,1)$ tenemos que

$$\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En consecuencia, la función $\sqrt{1+(f')^2}$ a integrar es par, de lo que concluimos que, si la integral impropia (16.26) converge, entonces

$$\int_{-1}^1\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=2\lim_{h\to0^-}\int_0^{1+h}\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Asimismo,

$$\lim_{h\to 0^-}\int_0^{1+h}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{h\to 0^-}\big(\operatorname{arc\,sen}(1+h)-\operatorname{arc\,sen}(0)\big)=\operatorname{arc\,sen}(1)=\frac{\pi}{2}.$$

Esto muestra que

$$\ell(f)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\pi,$$

lo que coincide con la definición de π como la mitad de la longitud de la circunferencia de radio 1 (Sección 6.4.1).

Ejercicio 16.3.5. *Demostrar que la longitud del gráfico de la función $f:[-r,r]\to\mathbb{R}$, $f(x):=\sqrt{r^2-x^2}$ es igual a πr. Interpretar el resultado geométricamente.*

16.3.2. Las funciones trigonométricas revisitadas

Dado $\alpha\in[0,\pi]$, en la Sección 10.1.1 definimos los valores $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ como las coordenadas x e y del punto "final" del "arco continuo" de longitud α que "recorre" en sentido antihorario la circunferencia unidad, "comenzando" en el punto $(1,0)$ y "terminando" en un punto (x,y) (ver la Figura 16.4). Asimismo, para la "buena definición" de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$, fue necesario suponer que **cada $\alpha\in[0,\pi]$ corresponde a un único arco continuo** de este tipo. Dado que ahora tenemos una noción de longitud de curva, nos proponemos revisitar esta construcción.

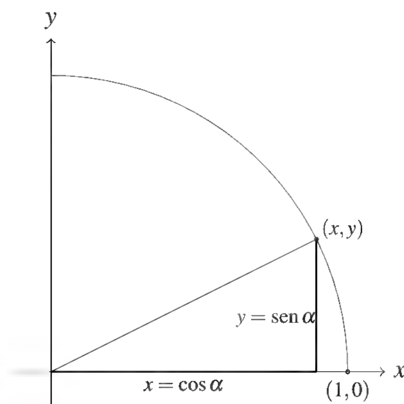


Figura 16.4.: La definición $\operatorname{sen}(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ para $\alpha\in[0,\pi/2]$.

Una definición "analítica" de las funciones seno y coseno

El Ejemplo 16.3.4, que discute la longitud del gráfico de la función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x):=\sqrt{1-x^2}$, nos provee una buena pista de cómo encarar la cuestión. **Sin presuponer la existencia de la función arco seno**, dado que nuestros argumentos entrarían en un círculo vicioso, comenzamos

por observar que la integral impropia

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{16.27}$$

converge. En efecto, sabemos que $\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2} dx$ converge (Ejercicio 16.2.16), de lo cual, por la paridad de f, deducimos que (16.27) converge.

Más aún, la integral (16.27) converge a π, definido como en la Sección 6.4.1. En efecto, en la Sección 6.4.1 hemos definido a 2π “por longitudes” como el límite de la sucesión $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde π_n es el perímetro del polígono regular $\mathscr{P}_n$ inscripto en la circunferencia de radio 1 con 2^n lados (Lema 6.4.2). Observamos que la curva poligonal $\mathscr{P}_n^+$ que consiste del conjunto de los lados de $\mathscr{P}_n$ contenidos en el semiplano superior $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ resulta inscripta en el gráfico de la función f. En consecuencia, de nuestra definición geométrica de π (Teorema 6.4.6) y la definición de longitud de curva, tenemos que

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi_n}{2} = \lim_{n\to\infty} \ell(\mathscr{P}_n^+) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

En resumen, tenemos el siguiente resultado.

Lema 16.3.6. *La integral (16.27) converge a π.*

A partir del Lema 16.3.6 obtenemos una definición “analítica” de la longitud del “arco continuo” γ_x que “recorre” en sentido antihorario la circunferencia unidad, “comenzando” en el punto $(1,0)$ y “terminando” en un punto $\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$. En efecto, observamos que, si definimos

$$g : [-1,1] \to [0,\pi], \quad g(x) := \int_{x}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$

entonces g resulta bien definida, dado que la integral impropia que la define converge para cada $x \in [-1,1]$. En particular, de nuestra discusión sobre el concepto de longitud de curva vemos que $g(x)$ resulta la longitud del arco γ_x para cada $x \in [-1,1]$.

Por el Teorema fundamental del cálculo (Teorema 16.1.11), la función g resulta derivable en $(-1,1)$, siendo $g'(x) = -(1-x^2)^{-1/2}$ para cada $x \in (-1,1)$. En particular, g resulta estrictamente decreciente, dado que $g'(x) < 0$ para cada $x \in (-1,1)$. Asimismo, $g(1) = 0$ y $g(-1) = \pi$, de lo que concluimos que su función inversa

$$\cos := g^{-1} : [0,\pi] \to [-1,1] \tag{16.28}$$

resulta:

- continua, ya que g es una función continua definida en $[-1,1]$ (Teorema 10.2.18);
- derivable en $(0,\pi)$, ya que $g'(x) \neq 0$ para cada $x \in (-1,1)$ (Corolario 11.2.6);
- estrictamente decreciente, ya que g lo es.

Asimismo, dado $\alpha \in [0,\pi]$, vemos que $\cos(\alpha)$ es el único número real en $[0,\pi]$ tal que

$$\alpha = g(\cos(\alpha)) = \int_{\cos\alpha}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Así, obtenemos **una definición analítica de la función coseno** en $[0,\pi]$, **como la coordenada** $x=\cos\alpha$ **del punto final** $(x(\alpha),y(\alpha))$ **del arco continuo** $\gamma=\gamma_\alpha$ **que comienza en** $(1,0)$ **y tiene longitud** α. A su vez, definimos $\operatorname{sen}:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ en la forma

$$\operatorname{sen}\alpha := \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \tag{16.29}$$

esto es, como la coordenada $y=y_\alpha$ del punto "final" del arco $\gamma=\gamma(\alpha)$.

Las propiedades de las funciones seno y coseno

Afirmamos que las funciones $\cos,\operatorname{sen}:[0,\pi]\to[-1,1]$, definidas de acuerdo a (16.28) y (16.29), satisfacen las propiedades que hemos usado en las Secciones 10.1.1 y 11.1.1, esto es, para $x,y\in[0,\pi]$ se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x = 1 \ \text{ para cada } x\in[0,\pi], \tag{16.30}$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x\cos y+\operatorname{sen}y\cos x \ \text{ para } x,y\in[0,\pi/2), \tag{16.31}$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y \ \text{ para } x,y\in[0,\pi/2), \tag{16.32}$$

$$\operatorname{sen}x \le x \le \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} \ \text{ para cada } x\in[0,\pi/2). \tag{16.33}$$

Comenzamos observando que la identidad (16.30) es un consecuencia directa de la definición (16.29) de la función seno.

El siguiente paso es considerar la validez de las fórmulas (16.31) y (16.32) con nuestra definición "analítica" de las funciones seno y coseno. Para esto, observamos que, del resultado sobre la derivada de la función inversa (Corolario 11.2.6), tenemos que

$$\cos'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)} = -\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-\cos^2(g(x))} = -\operatorname{sen}(g(x))$$

para cada $x\in(-1,1)$, es decir, $\cos'\alpha=\operatorname{sen}\alpha$ para cada $\alpha\in(0,\pi)$. A su vez, combinando esta identidad con la definición de $\operatorname{sen}\alpha$, concluimos que

$$\operatorname{sen}'(\alpha) = \frac{-\cos\alpha\cos'\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{-\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \cos\alpha$$

para cada $\alpha\in(0,\pi)$. Esta información sobre las funciones derivadas $\cos'$ y sen' nos va a permitir deducir la validez de (16.31) y (16.32).

Observamos que la validez de (16.31) y (16.32) es equivalente a la de las dos identidades si-

guientes, que se obtienen reemplazando x por $x+y$ e y por $-x$ en (16.31) y (16.32):

$$\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(x+y)\,\cos x - \cos(x+y)\,\operatorname{sen} x, \tag{16.34}$$

$$\cos y = \cos(x+y)\,\cos x + \operatorname{sen}(x+y)\,\operatorname{sen} x. \tag{16.35}$$

Es claro que (16.34) y (16.35) son evidentemente ciertas para $y=0$. Asimismo, si fijamos $y \in (0,\pi/2)$ y consideramos los miembros derechos de (16.34) y (16.35) como funciones de la variable x, entonces

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{sen}(x+y)\,\cos x - \cos(x+y)\,\operatorname{sen} x)' = \\
&\quad = \cos(x+y)\,\cos x - \operatorname{sen}(x+y)\,\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+y)\,\operatorname{sen} x - \cos(x+y)\,\cos x = 0, \\
&(\cos(x+y)\,\cos x + \operatorname{sen}(x+y)\,\operatorname{sen} x)' = \\
&\quad = -\operatorname{sen}(x+y)\,\cos x - \cos(x+y)\,\operatorname{sen} x + \cos(x+y)\,\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+y)\,\cos x = 0,
\end{aligned}$$

es decir, los miembros derechos de (16.34) y (16.35) son funciones constantes en el intervalo $[0,\pi/2]$, y por lo tanto coinciden con su valor en $x=0$, esto es, $\operatorname{sen} y$ y $\cos y$ respectivamente, como queríamos demostrar.

Por último, la demostración de (16.33) se obtiene observando que los tres miembros resultan iguales en $x=0$ y comparando las derivadas correspondientes en $(0,\pi/2)$. En resumen, tenemos el siguiente resultado, que asegura que las funciones seno y coseno que hemos definido de acuerdo a (16.28) y (16.29), tienen las mismas propiedades que las definidas geométricamente en la Sección 10.1.1.

Teorema 16.3.7. *Las funciones* $\cos, \operatorname{sen} : [0,\pi] \to [-1,1]$ *definidas de acuerdo a (16.28) y (16.29) satisfacen las propiedades (16.30), (16.31), (16.32) y (16.33).*

Ejercicio 16.3.8. *Demostrar que* $\cos, \operatorname{sen} : [0,\pi] \to [-1,1]$ *definidas como en (16.28) y (16.29) poseen derivada por derecha en 0 y por izquierda en π, siendo* $\operatorname{sen}' 0 = 1$, $\operatorname{sen}' \pi = -1$ *y* $\cos' 0 = \cos' \pi = 0$ *(donde en todos estos casos la derivada es la correspondiente derivada lateral).*

A fin de obtener definiciones analíticas de seno y coseno en todo $\mathbb{R}$ basta con extender la función seno por imparidad a $[-\pi,\pi]$, la función coseno por paridad a $[-\pi,\pi]$, y posteriormente extender ambas por perioricidad a $\mathbb{R}$.

Bibliografía

[AD63] A. Aziz and J. Diaz. On Pompeiu's proof of the mean-value theorem of the differential calculus of real-valued functions. *Contrib. Differ. Equations*, 1(4):467–481, 1963.

[Ale85] J. Alexander. The numerics of computing geodetic ellipsoids. *SIAM Rev.*, 27(2):241–247, 1985.

[BM04] G. Boros and V. Moll. *Irresistible integrals. Symbolics, analysis and experiments in the evaluation of integrals.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[Bre73] R. Brent. *Algorithms for minimization without derivatives.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

[CJ99] R. Courant and F. John. *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, volume I. Limusa, México, 1999.

[Cla79] C. Clark. Mathematical models in the economics of renewable resources. *SIAM Rev.*, 21(1):81–9, 1979.

[CRS96] R. Courant, H. Robins, and I. Stewart. *What is mathematics?: An elementary approach to ideas and methods.* Oxford Univ. Press, Oxford, 1996.

[DB08] G. Dahlquist and A. Björck. *Numerical methods in scientific computing*, volume I. SIAM, Philadelphia, PA, 2008.

[Ded98] R. Dedekind. *¿Qué son y para qué sirven los números?* Alianza, Madrid, 1998.

[DR07] P.J. Davis and P. Rabinowitz. *Methods of numerical integration.* Dover Pub., New York, 2007.

[EHH+91] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, and R. Remmert. *Numbers*, volume 123 of *Grad. Texts in Math.* Springer, New York, 1991.

[EK05] L. Edelstein-Keshet. *Mathematical models in biology*, volume 46 of *Classics Appl. Math.* SIAM, Philadelphia, 2005.

[Fle74] T.M. Flett. Some historical notes and speculations concerning the mean value theorems of the differential calculus. *Bull. Inst. Math. Appl.*, 10(3):66–72, 1974.

[Gol91] D. Goldberg. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *ACM Computing Surveys*, 23(1):5–48, 1991.

[Hal74] P. Halmos. *Naive set theory*. Undergrad. Texts Math. Springer, New York Heidelberg, 1974.

[Har67] G.H. Hardy. *A course of pure mathematics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 10th edition, 1967.

[Hig96] N. Higham. *Accuracy and stability of numerical algorithms*. SIAM, Philadelphia, PA, 1996.

[HLP34] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.

[Hof02] J. Hofbauer. A simple proof of $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ and related identities. *Amer. Math. Monthly*, 109(2):196–200, 2002.

[IK94] E. Isaacson and H. Keller. *Analysis of numerical methods*. Dover Pub., New York, 1994.

[Joh30] M. Johnson. Two discontinuous functions. *Amer. Math. Monthly*, 37(9):497, 1930.

[Kal93] D. Kalman. Six ways to sum a series. *College Math. J.*, 24(5):402–421, 1993.

[Kno56] K. Knopp. *Infinite sequences and series*. Dover Pub., New York, 1956.

[Kor96] R. Kortram. Simple proofs for $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ and $\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. *Math. Mag.*, 69(2):122–125, 1996.

[McN07] J. McNamee. *Numerical methods for roots of polynomials, Part I*, volume 14 of *Stud. Comput. Math.* Elsevier, Amsterdam, 2007.

[Mig92] M. Mignotte. *Mathematics for computer algebra*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1992.

[Mit70] D. Mitrinovic. *Analytic inequalities*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1970.

[MS85] G. Munro and A. Scott. The economics of fisheries management. In A. Kneese and J. Sweeney, editors, *Handbook of natural resource and energy economics, vol. II*, pages 623–676. Elsevier, Amsterdam, 1985.

[Mur80] V. Murty. How close are the Riemann sums to the integral they approximate? *College Math. J.*, 11(4):268–270, 1980.

[Mur02] J. Murray. *Mathematical biology I. An introduction*, volume 17 of *Interdiscip. Appl. Math.* Springer, Berlin Heidelberg, 3rd edition, 2002.

[Niv47] I. Niven. A simple proof that π is irrational. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53:509, 1947.

[NP06] C. Niculescu and L.-E. Persson. *Convex functions and their applications*, volume 23 of *CMS Books Math./Ouvrages Math. SMC*. Springer, New York, 2006.

[PS78] G. Pólya and G. Szegö. *Problems and theorems in Analysis I*. Classics Math. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1978.

[SB94] C. Simon and L. Blume. *Mathematics for economists*. W.W. Norton & Company, New York London, 1994.

[Spi92] M. Spivak. *Calculus*. Reverté, Barcelona, 1992.

[ST95] T. Scavo and J. Thoo. On the geometry of Halley's method. *Amer. Math. Monthly*, 102(5):417–426, 1995.

[Str86] G. Strang. *Introduction to applied mathematics*. Wellesley–Cambridge Univ. Press, Wellesley, MA, 1986.

[Str88] G. Strang. A framework for equilibrium equations. *SIAM Rev.*, 30(2):283–297, 1988.

[Zhe02] L. Zheng. An elementary proof for two basic alternating series. *Amer. Math. Monthly*, 109(2):187–188, 2002.

Índice alfabético